正十七边形作图的思路和方法介绍

何继刚 袁 桐

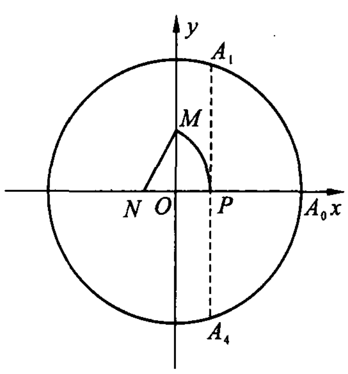
（扬州大学附属中学 225002） （扬州市田家炳实验中学 225002）

"数学王子"高斯(C. F. Gauss)在 19 岁时发现了正十七边形的尺规作法，无论对他本人还是对数学界都是莫大的贡献，可以说是刻骨铭心的事件. 因此，在他的墓碑上刻上了正十七边形，作为永久的纪念.

正十七边形的作法之所以奇特，首先是它基于大量的代数知识(复数知识)，要用到棣米弗公式，还要用到构建代数方程的技巧，从而得到"一套"解答. 待这一套解答得到之后，作图倒简单了.

运用复数知识，可以先从正五边形的作图说起.

设 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 是单位圆上正五边形的五个顶点，圆心为 O，以 $\overrightarrow{OA_0}$ 为 x 轴，如图.



首先，设 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，则有 $\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5=0$

从而 $\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4=-1$ ①

其次，将①左边分成两部分，x_0, x_1，其中

设 $x_0=\varepsilon+\varepsilon^4$，$x_1=\varepsilon^2+\varepsilon^3$，易知 $x_0+x_1=-1$

又 $x_0x_1=(\varepsilon+\varepsilon^4)(\varepsilon^2+\varepsilon^3)=\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^7=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4=-1$.

所以 x_0, x_1 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根，即 $x_{0,1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

又 $x_0=\varepsilon+\varepsilon^4=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$

$=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$.

所以 $x_0=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

且 $\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{x_0}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

由此二次根式，提供了如下作图方法：

画好单位圆后，定圆与 x 轴的正向交点为 A_0，在 y 轴上取点 M，使 $OM=\frac{1}{2}$，再在 x 轴的负半轴上取点 N，使 $ON=\frac{1}{4}$，易知 $|MN|=\frac{\sqrt{5}}{4}$. 又以 N 为圆心，$|MN|$ 为半径画弧交 x 轴正半轴于点 P，易知 $|OP|=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，此即 $\cos\frac{2\pi}{5}$. 过 P 点作 y 轴的平行线，交圆于二点，此即为正五边形的顶点 A_1 和 A_4，由此不难再画出点 A_2, A_3. 完成正五边形的作图.

以上作正五边形的过程，已渗透了高斯作正十七边形的思想，不难看出，作正十七边形的核心是作出 $\cos\frac{2\pi}{17}$，首先要建立和解出关于 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 的方程，这是关键所在.

第一，设 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$，由 $\sum\limits_{m=0}^{16}\varepsilon^m=0$ 知

$\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{16}=-1$ ②

第二，将②式左边分成两部分，设为 x_0, x_1 易知，$x_0+x_1=-1$，又将 x_0, x_1 设为：

$x_0=\varepsilon+\varepsilon^9+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^8+\varepsilon^4+\varepsilon^2$ ③

$$x_1=\varepsilon^3+\varepsilon^{10}+\varepsilon^5+\varepsilon^{11}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^7+\varepsilon^{12}+\varepsilon^6 \quad ④$$

之所以这样设，是为了使它满足 $x_0\cdot x_1$ 为实数. 读者可以验算得 $x_0\cdot x_1=-4$.

于是可以得到 x_0,x_1 是方程 $x^2+x-4=0$ 的二根：$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

再看一下，x_0,x_1 是什么：

$$x_0=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{18\pi}{17}+i\sin\frac{18\pi}{17}+\cos\frac{26\pi}{17}+i\sin\frac{26\pi}{17}+\cos\frac{30\pi}{17}+i\sin\frac{30\pi}{17}+\cos\frac{32\pi}{17}+i\sin\frac{32\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}+i\sin\frac{16\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+i\sin\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+i\sin\frac{4\pi}{17}$$

因为 $\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{32\pi}{17}=0$，$\sin\frac{18\pi}{17}+\sin\frac{16\pi}{17}=0$，$\sin\frac{26\pi}{17}+\sin\frac{8\pi}{17}=0$，$\sin\frac{30\pi}{17}+\sin\frac{4\pi}{17}=0$，

所以

$$x_0=2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}\right)\in\mathbf{R},$$

同样，

$$x_1=2\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{10\pi}{17}+\cos\frac{14\pi}{17}+\cos\frac{12\pi}{17}\right)\in\mathbf{R}$$

不难看出，x_1 表达式中只有第一项为正，后三项为负，且 $\left|\cos\frac{14\pi}{17}\right|>\left|\cos\frac{6\pi}{17}\right|$，所以 $x_1<0$. 这就是说，x_0 与 x_1 中一正一负，

所以 $x_0=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$，$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$　　⑤

由于 $17=4^2+1^2$，容易用尺规方法作出 $x_0\cdot x_1$.

如果从 x_0,x_1 的表达式中，用三角方法变为 $\cos\frac{2\pi}{17}$的高次(四次)方程去解出 $\cos\frac{2\pi}{17}$的值，那就与作正五边形的方法 1 差不多了，但这不可行(次数太高了)，这正是高斯方法的妙处.

进一步，将③中的奇数项和设为 y_0，偶数项之和设为 y_1，将④中的奇数项和设为 y_2，偶数项和设为 y_3，易知，$y_0+y_1=x_0$，$y_2+y_3=x_1$，并且满足 $y_0\cdot y_1=-1$，$y_2\cdot y_3=-1$，于是有

$$y^2-x_0y-1=0,\ y_{0,1}=\frac{x_0\pm\sqrt{x_0^2+4}}{2};$$

$$y^2-x_1y-1=0,\ y_{2,3}=\frac{x_1\pm\sqrt{x_1^2+4}}{2}$$

由于 y_0、y_1 是一正一负，y_2、y_3 也是一正一负，根据设计：

$$y_0=\varepsilon+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{16}+\varepsilon^4 \quad ⑥$$

$$=\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{26\pi}{17}+\cos\frac{32\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}>0,\text{所以 } y_1<0$$

所以 $y_0=\dfrac{x_0+\sqrt{x_0^2+4}}{2}$

类似地，

$$y_2=\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{12} \quad ⑦$$

$$=\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{10\pi}{17}+\cos\frac{28\pi}{17}+\cos\frac{24\pi}{17}$$

$$=2\cos\frac{6\pi}{17}+2\cos\frac{10\pi}{17}=4\cos\frac{8\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}>0$$

所以 $y_2=\dfrac{x_1+\sqrt{x_1^2+4}}{2}$.

最后，再将 y_0,y_1,y_2,y_3 中的奇数项与偶数项再拆开. 其实，我们最关心的是 y_0：

$$Z_0=\varepsilon+\varepsilon^{16},\ Z_1=\varepsilon^{13}+\varepsilon^4,$$

由于 $Z_0+Z_1=y_0$，而 $Z_0\cdot Z_1=\varepsilon^{14}+\varepsilon^5+\varepsilon^{12}+\varepsilon^3=y_2$

所以 Z_0,Z_1 是方程 $Z^2-y_0Z+y_2=0$ 的二根，

所以 $Z_{0,1}=\dfrac{y_0\pm\sqrt{y_0^2-4y_2}}{2}$

前面已证得 $y_0>0$，$y_2>0$，

又 $Z_0=\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{32\pi}{17}=2\cos\frac{2\pi}{17}$

$Z_1=\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{26\pi}{17}=2\cos\frac{8\pi}{17}$

所以 $Z_0>Z_1$，即 $Z_0=\dfrac{y_0+\sqrt{y_0^2-4y_2}}{2}$

又 $\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{Z_0}{2}$，

于是，我们得出一系列的公式：

$$x_0=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad ⑧$$

$$y_0=\frac{x_0+\sqrt{x_0^2+4}}{2},\ y_2=\frac{x_1+\sqrt{x_1^2+4}}{2} \quad ⑨$$

$$Z_0=\frac{y_0+\sqrt{y_0^2-4y_2}}{2},\ \cos\frac{2\pi}{17}=\frac{Z_0}{2} \quad ⑩$$

有了这些公式，只要依次作出 x_0,x_1,y_0,y_2，再作出 Z_0，便可以作出 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 了.

最后介绍作法步骤.

(1)为了简单,单位圆、坐标轴就不说了,而直接作出$\frac{x_0}{2}$和$\frac{x_1}{2}$:

在x轴负方向上取点N,使$ON=\frac{1}{4}$,易知$NB=\frac{\sqrt{17}}{4}$,以N为圆心,NB为半径,画弧交x轴于F、F'(分别在正、负半轴),易知F、F'的横坐标分别为$\frac{x_0}{2}$,$\frac{x_1}{2}$. 此时$|FB|=\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+1}=\frac{\sqrt{x_0^2+4}}{2}$,以$F$为圆心,$|FB|$为半径,画弧交$x$轴正方向于$G$,此时$|OG|=\frac{x_0}{2}+\frac{\sqrt{x_0^2+4}}{2}=y_0$.

类似地$|F'B|=\sqrt{\frac{x_1^2}{4}+1}=\frac{\sqrt{x_1^2+4}}{2}$,以$F'$为圆心,$|F'B|$为半径,画弧交$x$轴正方向于$G'$,此时,$OG'=\frac{x_1}{2}+\frac{\sqrt{x_1^2+4}}{2}=y_2$.

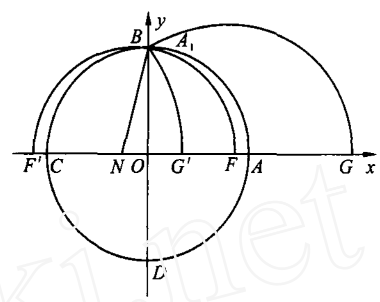
(2) 以下用另一种方法作出$Z_0=\frac{y_0+\sqrt{y_0^2-4y_2}}{2}$

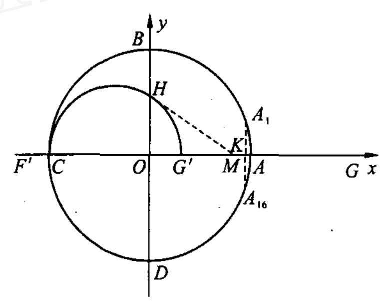
先以CG'为直径画圆,设与y轴正半轴交于点H,(易知$OH^2=1\cdot y_2$),又以H圆心,$\frac{1}{2}OG$为半径画弧交x轴正半轴于K,则有

$$|OK|=\sqrt{\frac{OG^2}{4}-OH^2}=\sqrt{\frac{y_0^2}{4}-y_2}=\frac{\sqrt{y_0^2-4y_2}}{2}$$

再以K为圆心,$KH=\left(\frac{1}{2}OG\right)$为半径画弧交$x$轴正半轴于$L$,取$OL$的中点$M$,则$OM=\frac{y_0+\sqrt{y_0^2-4y_2}}{4}=\frac{Z_0}{2}=\cos\frac{2\pi}{17}$.

过点M作y轴的平行线交圆于两点,即为A_1和A_{16},从而作出正十七边形.





(上接 31 页)

4 给教师和教学的建议

统计是一个和生活实际密切相关的数学分支,其中涉及的数据收集处理、统计图表的识别和绘制、利用平均数和标准差分析数据的平均水平和离散程度、怎样抽样等等都是非常具有实用价值的,因此统计在新课标中受到重视是势在必行的. 我们作为教师在统计的教学中不能只教学生死背公式、生搬硬套,而应该多关注一下学生对于概念的理解. 在数据收集和统计图表的制作中我们可以鼓励学生作一些调查活动,在自己动手动脑的实践中去理解书本中的知识点. 我们教师也可以借鉴上面的研究在中学生中展开对于标准差、分布、抽样估计等概念理解的调查研究,通过反馈来指导和促进我们的课堂教学.

参考文献

1 中华人民共和国教育部制定. 全日制普通高级中学数学教学大纲. 北京:人民教育出版社,2002

2 张奠宙,李士锜,李俊. 数学教育学导论[M]. 北京:高等教育出版社,2003

3 delMas,R.,& Liu,Y.(July 2004). "Students' Understanding of Factors that Affect the Standard Deviation." Tenth International Congress on Mathematical Education. Lyngby, Denmark