椭圆定长弦中点轨迹的一种解法

理想

2013 年 1 月 22 日

摘要

本文介绍了一种计算椭圆定长弦中点轨迹的方法。设椭圆长、短轴分别为$2a$、$2b$，弦长为$2r$，随着弦的两端在椭圆上滑动，弦的中点形成的轨迹为：

$$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{r^2}{a^2b^2})+\frac{r^2}{a^2b^2}=0$$

它不是一个椭圆，而是一个高次曲线。

设椭圆长、短轴分别为$2a$、$2b$，弦长为$2r$，设弦的两端分别为$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 弦中点为$P(x,y)$, 有如下关系：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

条件一：点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$在椭圆上，满足椭圆方程：

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

条件二：弦长$|AB|=2r$：

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4r^2 \tag{3}$$

第一个关键方程：A、B两点椭圆方程相加：(1) + (2)：

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2+y_2^2}{b^2}=2$$

$$\frac{(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)^2+(y_1-y_2)^2}{b^2}=4 \tag{4}$$

设$x_1-x_2=2w$，$y_1-y_2=2h$，结合$x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$，代入(4):

$$\frac{4x^2+4w^2}{a^2}+\frac{4y^2+4h^2}{b^2}=4$$

$$\frac{x^2+w^2}{a^2}+\frac{y^2+h^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

得到第一个关键方程(5)。

第二个关键方程：(1) - (2)：

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$$

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$$

$$\frac{2x\cdot 2w}{a^2}+\frac{2y\cdot 2h}{b^2}=0$$

移项，两边平方（消去负号）：

$$\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{w^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{b^2} \tag{6}$$

得到第二个关键方程(6)。

第三个关键方程：设$2w=x_1-x_2$，$2h=y_1-y_2$，代入(3)式：

$$w^2+h^2=r^2 \tag{7}$$

得到第三个关键方程(7)。

综上，得到的三个关键方程如下：

$$\begin{aligned}\frac{x^2+w^2}{a^2}+\frac{y^2+h^2}{b^2} &= 1 && (8)\\ \frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{w^2}{a^2} &= \frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{h^2}{b^2} && (9)\\ w^2+h^2 &= r^2 && (10)\end{aligned}$$

只要从中消去w^2和h^2项，即可得到仅包含x^2和y^2的曲线方程。下面是一种解法：设

$$p = \frac{x}{a} \tag{11}$$
$$q = \frac{y}{b} \tag{12}$$
$$m = \frac{w}{a} \tag{13}$$
$$n = \frac{h}{b} \tag{14}$$

方程组化为

$$p^2 + q^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{15}$$
$$p^2 m^2 = q^2 n^2 \tag{16}$$
$$a^2 m^2 + b^2 n^2 = r^2 \tag{17}$$

$(17) \times p^2 + (17) \times q^2$得：

$$a^2 m^2 p^2 + b^2 n^2 p^2 + a^2 m^2 q^2 + b^2 n^2 q^2 = p^2 r^2 + q^2 r^2 \tag{18}$$

由$(16) p^2 m^2 = q^2 n^2$，代入上式(18)，

$$a^2 n^2 q^2 + b^2 n^2 p^2 + a^2 m^2 q^2 + b^2 m^2 p^2 = p^2 r^2 + q^2 r^2$$

$$(a^2 q^2 + b^2 p^2)(m^2 + n^2) = (p^2 + q^2) r^2 \tag{19}$$

$(15) \times (a^2 q^2 + b^2 p^2)$，得：

$$(a^2 q^2 + b^2 p^2)(p^2 + q^2 + m^2 + n^2) = (a^2 q^2 + b^2 p^2)$$

$$(a^2 q^2 + b^2 p^2)(p^2 + q^2) + (a^2 q^2 + b^2 p^2)(m^2 + n^2) = (a^2 q^2 + b^2 p^2)$$

联合式(19)，消去$(m^2 + n^2)$项，得：

$$(a^2 q^2 + b^2 p^2)(p^2 + q^2) + (p^2 + q^2) r^2 = (a^2 q^2 + b^2 p^2)$$

$$(p^2 + q^2)(a^2 q^2 + b^2 p^2 + r^2) = (a^2 q^2 + b^2 p^2 + r^2) - r^2$$

$$(p^2 + q^2 - 1)(a^2 q^2 + b^2 p^2 + r^2) + r^2 = 0$$

$$(p^2 + q^2 - 1)(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2 b^2}) + \frac{r^2}{a^2 b^2} = 0$$

代入

$$p = \frac{x}{a}$$

$$q = \frac{y}{b}$$

得到最终结果：

$$(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{r^2}{a^2b^2}) + \frac{r^2}{a^2b^2} = 0 \tag{20}$$

结论：椭圆定长弦中点轨迹，其实并不难解，只是它不是一个椭圆曲线，即使解出函数方程，也不容易看出曲线的形状。