欧拉数学在数项级数中的妙用

苏剑林

http://spaces.ac.cn

2013 年 12 月 26 日

摘要

通常我们都认为具体的级数是比较容易分析的，而抽象级数则比较难把握思路。抽象级数题目的种类太多，为了熟练解题通常都需要记忆很多形式，而且这些形式通常都很单一，缺乏可拓展性。而运用“欧拉数学”，可以为我们解决数项级数题提供一个独特的、实用性广的思路。

所谓欧拉数学，是指大胆地进行不严谨的假设、替换、类比等，从而得到结论。[1]这是数学家欧拉在研究数学问题时的一个典型作风。这里得到的结论可能是一般分析方法难以得到的，当然也有可能得到错误的结论。但是欧拉数学的思路是相当符合直觉的，它可以为我们的解题提供丰富的灵感，而且在很多时候，我们可以得到正确的结论，并且它的不严谨推导过程是容易严格化的。本文简单介绍一下欧拉数学在数项级数中的妙用。

目录

1 准备知识

数学分析一般处理的是连续的对象，而数列则是离散的对象，两者之间有不同的研究方法，但是有不少性质是类似的、甚至是一一对应的。欧拉数学体现为不严谨的假设、替换、类比等，在数项级数中，大概有下列的一些替换：

1 $n \to x$，另外相邻项可以视为同一项，如a_{n-1}, a_n, a_{n+1}都可以视为$a(x)$；

2 求和→积分：即$\sum \to \int$。这个替换源于积分判别法，即一个正项级数的收敛跟其对应函数的无穷积分收敛是等价的；

3 差分→求导：由于$f'(n) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{f(n+\varepsilon)-f(n)}{\varepsilon} \approx \frac{f(n+\varepsilon)-f(n)}{\varepsilon}$，取$\varepsilon = 1$的近似即得$f'(n) \approx f(n+1) - f(n)$；

4 $Abel$变换→分部积分法：仔细观察$Abel$变换[2]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \tag{1}$$

其中$\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B_n$，如果作上面两步的替换，那么我们就得到

$$\int a(x)B'(x)dx = a(n)B(n) - \int a'(x)B(x)dx$$

这就是数学分析中的分部积分法！也就是说$Abel$变换对应于分部积分法。

说明：我们并不需要去深究这些替换的合理性，因为它们本身就是不严格的，它们的作用是给我们带来解决问题的思路——直觉性的、轻松的思路。

2 典型例子

事实上，就简单地根据上面的四个替换，就可以为解决大多数数项级数问题提供思路，并为严格化的解决提供基础。下面就平时的考试及《数学分析学习辅导I》中的题目进行举例说明。

2.1 例1

设$\{a_n\}$为单调递增的正数列。那么$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛。[3]

分析：这是典型的抽象级数题目，咋看之下很难把握思路，即难以确定是要用定义法、还是放缩法、还是其它方法。但是欧拉数学很快捷地给了我们一个思路。用积分来替换求和，求导替换差分，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\approx\int_1^{\infty}\frac{a'(x)}{a(x)}dx=\ln a(x)|_1^{\infty}\sim\ln a(\infty) \tag{2}$$

可以发现，在替换的过程中，甚至我们符号的使用都是不严谨的。但是这不重要，因为我们不会在正式答卷上写上这样的式子，这只是我们的分析过程。得出(2)并没有给我们解决问题，但我们可以有助于我们理解题目，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛“约等于”$\ln a(+\infty)$存在。这是题目要证的。但这不是重点，重点是欧拉数学给我们带来了$\sum\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\approx\ln a_N$！这是个重要的关系。根据$\ln(1+x)\leq x$，有

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\ln\left[1-\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right]\leq-\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \tag{3}$$

即

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n\geq 1-\frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{4}$$

这是解决问题的关键之一，因为这样子就有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)&\leq\sum_{n=1}^{N}(\ln a_{n+1}-\ln a_n)\\&=\ln a_{N+1}-\ln a_1\end{aligned} \tag{5}$$

至此，必要性证毕。即$\{a_n\}$收敛，则意味着$\sum\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$单调递增有上界，所以$\sum\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛。

考虑到充分性是必要性的反面，必要性的关键是不等式$\ln(1+x)\leq x$，那么如果能够找到类似的，反号的不等式，那么充分性就可以证明了，稍微将右端缩小一下，我们考虑$\ln(1+x)\geq 2x$，当然，它并非恒成立，但是

在$[-1,0]$ 内却能恒成立。[1]显然$-1 \le -\left(1-\frac{a(n)}{a(n+1)}\right) \le 0$ 恒成立！于是我们还有

$$\frac{1}{2}\left(\ln a_{n+1}-\ln a_n\right) \le 1-\frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{6}$$

这给出下界

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) &\ge \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\ln a_{n+1}-\ln a_n\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln a_{N+1}-\ln a_1\right)\end{aligned} \tag{7}$$

这等价于充分性。

解答：

因为在$[-1,0]$中恒有

$$2x \le \ln(1+x) \le x$$

所以

$$-2\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \le \ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln\left[1-\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right] \le -\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

整理得

$$\frac{1}{2}\left(\ln a_{n+1}-\ln a_n\right) \le 1-\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \ln a_{n+1}-\ln a_n$$

两边累加得

$$\frac{1}{2}\left(\ln a_{N+1}-\ln a_1\right) \le \sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \le \ln a_{N+1}-\ln a_1$$

如果$\{a_n\}$收敛，则由右边的不等号得$\sum\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$单调递增有上界，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛。必要性得证；

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$收敛，则由左边的不等号得$\{a_n\}$有单调递增有上界，所以$\{a_n\}$收敛。充分性得证。

总结：本题我采用了较长篇幅来讲解思路。欧拉数学的作用体现在哪里呢？答案是它给出了$\ln a_n$！这是决定性的思路。有了这个思路，不等式就随之而来了，整个过程还是可以写得很简洁的。这样的思考过程开始可能感觉比较困难，但是稍加训练，就能够信手拈来了。

---

[1]不要被乘以2迷惑，因为我们考虑的是[-1,0]的区间，因此右端乘以2后当然是变小了。

2.2 例2

设级数$\{na_n\}$收敛，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1}-a_n)$收敛，试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。[4]

分析：按照“求差即求导、求和即求积”的思路，$\{na_n\}$收敛意味着$\lim\limits_{x\to+\infty} xa(x)$存在，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1}-a_n)$收敛相当于$\int_1^{+\infty} xa'(x)dx$存在，要证明$\int_1^{\infty} a(x)dx$存在。而易得

$$\int_1^{+\infty} a(x)dx = xa(x)|_1^{+\infty} - \int_1^{\infty} xa'(x)dx$$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty} xa(x)$和$\int_1^{+\infty} xa'(x)dx$都存在，所以$\int_1^{+\infty} a(x)dx$收敛。至此，我们完成了核心部分的论证，剩下就是把证明写出来。显然，关键的上式是“分部积分法”，这对应于数列的Abel 变换。

解答：由Abel变换

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$$

不妨设$b_k \equiv 1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})k$$

考虑$n\to\infty$的极限，右端两个极限都存在，显然左端收敛。

2.3 例3

设$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$收敛。[5]

分析：由我们列出的替换，可以考虑有$a_{n-2} \approx a_{n-1}$，即先考虑近似$a_n = 2a_{n-1}$，即$a_n = 2^n$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$收敛。[2]

这给我们的信息是“等比级数”，我们可以考虑用等比级数来放缩。考虑

$$a_n > p^n$$

那么希望

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} > p^{n-1} + p^{n-2} > p^n$$

[2] 如果你愿意，你也可以使用近似$a_n = 2a_{n-2}$，它同样会把我们引向等比级数。也就是说，欧拉数学由于它的不严谨，所以相当灵活，为我们提供了大量思考的空间。

即$p+1>p^2$，简单估算可取$p=\frac{3}{2}$。

解答：先证

$$a_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

用数学归纳法，易知对于$n=1,2$成立。且

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} > \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

所以$a_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$恒成立。所以

$$\sum_{n=1}^{N} a_n < \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 2$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}$单调递增有上界，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛。

2.4 例4

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ，试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散。[6]

分析：将本题换一个说法更直观：$\{S_n\}$是单调递增至$+\infty$的正数列，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-s_{n-1}}{S_n}$发散。这等价于本文的例2.1。当然，我们也可以不用例2.1的结论，直接按照替换规则，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n} \sim \int_1^{\infty}\frac{S'}{S}dx = \ln S|_1^{\infty} \sim \ln S(\infty)$$

同样地，这将我们引导到了$\ln(S_n)$。

2.5 例5

(**Raabe判别法**)设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数。证明：如果存在$p>1, N\in\mathbb{N}_+$使得$\forall n>N, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq p$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。[7]

分析：在我们的数学分析教材中，Raabe判别法被视为一个精度较高的判别法。[8]在这里，利用欧拉数学，给出观察Raabe 判别法一个独特的视角。$n\to x, a_n-a_{n+1}\to -a'(x), a_{n+1}\to a(x)$，我们有

$$\frac{a'(x)}{a(x)} \leq -\frac{p}{x}$$

两边积分得$\ln[a(x)] \le -p\ln x + \ln c$，整理得

$$a(x) \le \frac{c}{x^p}$$

或者其离散形式

$$a(n) \le \frac{c}{n^p}$$

这将我们引导到了p级数判别法。换句话说，事实上能够用Raabe判别法证明的题目，大多数都可以用p级数来放缩证明。[3]

2.6 例6

[9]设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，证明它们的Cauchy乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1)$$

收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k(b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n-k+1}) = 0$$

分析：本题是欧拉数学与数列结合的“集众家之大成”式的题目！

Cauchy乘积的难点在于它是一个正序乘上一个逆序，这样很多常规的方法，比如说数学归纳法都不能用了，因为从n到n+1，整个Cauchy乘积都变了。而且所给的充分必要条件看上去并没有规律可循，甚至有些别扭。但是利用欧拉数学，我们很快就可以找出规律来。记$A'(x) = a(x), B'(x) = b(x)$。

其中，题目所给的充分必要条件的连续形式是[4]

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^n a(x)\left(\int_0^x b(n-t)dt\right)dx \\
=&\lim_{n\to\infty}\int_0^n a(x)[B(n) - B(n-x)]dx \\
=&\lim_{n\to\infty} A(n)B(n) - \lim_{n\to\infty}\int_0^n a(x)B(n-x)dx
\end{aligned}$$

[3]并不是所有的Raabe可证的题目都可以用p级数来判别法，但是就具体题目而言，似乎p级数奏效的概率很大。

[4]欧拉数学只不过是形式上的分析，因此积分下限不是重要的。

Cauthy乘积的连续形式是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n dx\int_0^x a(t)b(x-t)dt$$

注意到，积分$\int_0^n dx\int_0^x a(t)b(x-t)dt$可以改写成二重积分$\iint\limits_D a(t)b(x-t)dtdx$，$D$为$x=y,y=0,x=n$ 所围成的区域，因此可以交换积分次序

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^n dx\int_0^x a(t)b(x-t)dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n dt\int_t^n a(t)b(x-t)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n a(t)dt\int_t^n b(x-t)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n a(t)[B(n-t)-B(0)]dt\end{aligned}$$

现在就把两个积分联系起来了。反观我们的过程，容易看出，关键是交换积分次序；而会返回到原题，可以猜测原题的关键是交换Cauchy乘积的求和顺序。因此写出下面的解答过程：

解答： 设

$$A_n=\sum_{k=1}^n a_n, B_n=\sum_{k=1}^n b_k$$

有（设$b_0=0$）

$$\sum_{k=1}^n a_k(b_n+b_{n-1}+\cdots+b_{n-k+1})=\sum_{k=1}^n a_k(B_n-B_{n-k})=A_nB_n-\sum_{k=1}^n a_kB_{n-k}$$

而Cauchy乘积为[5]

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j a_ib_{j+1-i} =&a_1b_1+\\ &a_1b_2+a_2b_1+\\ &a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+\\ &\cdots\\ &a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1\\ =&\sum_{j=1}^n a_j\sum_{i=1}^{n+1-j} b_i\\ =&\sum_{j=1}^n a_jB_{n+1-j}\end{aligned}$$

[5]留意连续版本与离散版本的对应与相似，这有助于我们熟练使用欧拉数学。

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_ib_{j+1-i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j}a_ib_{j+1-i}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n-1}a_jB_{n-j}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}a_jB_{n-j}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_kB_{n-k}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(b_n+b_{n-1}+\cdots+b_{n-k+1})+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_ib_{j+1-i}\right]=\lim_{n\to\infty}A_nB_n$$

至此，充分性和必要性都证明完了。中括号中的两部分的极限存在性是相互等价的。

3 思想总结

从上面的例子可以看出，欧拉数学并不是直接为我们证明题目，而是通过把离散的数列连续化，从而为我们的证明带来思路。通常来说，欧拉数学只是探讨性地思考，为严格证明铺垫。欧拉数学为我们提供了一条通向答案的直观思路，让我们更好地把握住题目的要领。它能发挥作用的重点在于：由于受到常规的数学分析训练，我们思考求导、积分等连续性问题时要比思考离散的数学问题要容易、快捷很多，因此不妨先做个连续的类似，然后再离散化。

当然，欧拉数学的模式是新的，刚开始时可能感觉比较困难，但是只要通过短时间的研究和训练，还是比较容易掌握的。稍微夸张地说，这是一条充满创意的路径。欧拉数学还在数学的其他方面有很多应用，比如数论、级数求和等等，欧拉有相当多凭借直觉和不严密推理得出的成果，这些都是值得我们细细品味的瑰宝。

参考文献

[1] 蔡茨(Paul Zeitz)著;李胜宏译《怎样解题-数学竞赛攻关宝典（第2版）》,P377

[2] 徐志庭,刘名生,冯伟贞《数学分析（二）》,P122,10.3.3

[3] 华南师范大学《数学分析（二）》期末考试,最后一题(2012)

[4] 刘名生,冯伟贞,罗世平《数学分析学习辅导I》,P141,例6

[5] 刘名生,冯伟贞,罗世平《数学分析学习辅导I》,P147,例8

[6] 刘名生,冯伟贞,罗世平《数学分析学习辅导I》,P153,例3

[7] 刘名生,冯伟贞,罗世平《数学分析学习辅导I》,P157,例9

[8] 徐志庭,刘名生,冯伟贞《数学分析（二）》,P116,定理10.2.9

[9] 刘名生,冯伟贞,罗世平《数学分析学习辅导I》,P158,例10