几何的数与数的几何
——超复数的浅探究

苏剑林

http://spaces.ac.cn

2014 年 1 月 11 日

摘要

今天，不论是数学还是物理的高维问题，都采用向量分析为基本工具，数学物理中难觅四元数的影子。然而在历史上，四元数的发展有着重要的意义。四元数（Quaternion）运算实际上是向量分析的“鼻祖”，向量点积和叉积的概念也首先出现在四元数的运算中，四元数的诞生还标记着非交换代数的开端。即使是现在，四元数还是计算机描述三维空间旋转问题最简单的工具。另外，作为复数的推广，四元数还为某些复数问题的一般化提供了思路。

本文把矩阵与几何适当地结合起来，利用矩阵行列式$\det(AB) = (\det A)(\det B)$这一性质得出了四元数以及更高维的超复数的生成规律，并讨论了它的一些性质以及它在描述旋转方面的应用。部分证明细节和不完善的思想放到了附录之中。

目录

1 背景

众所周知，复数作为一个二维向量，在处理大量的二维数学物理问题时是非常方便的。复数的便捷在于它的乘法有着非常良好的的性质，一是$arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$，这使得我们可以用复数方便地处理旋转问题；二是$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$，这一点在物理上的作用尤其突出，它可以简化物体在和距离有关的力场中的运动分析，比如可以用它来讨论天体力学的某些问题[1]。另外从理论形式来讲，复数在现代物理中也有着核心性的作用。

但是我们的世界不仅仅是二维，至少我们的空间已经是三维的[2]，因此显然就有了将复数推广到三维的甚至更高维的想法，这就是超复数的来源，根据维数的不同，超复数也被相应地称为n元数。历史上，爱尔兰数学家威廉·卢云·哈密顿就曾对三元数做了近十年的探索，而在1843年他终于认

[1]万有引力与距离的平方成反比。

[2]如果采用爱因斯坦的相对论观点，把时间也当作一维，那么至少就有4维了。

识到三元数是不可能的，要推广到4维，即四元数才是可能实现的。本文也将简单论述这一点。

另外，近年的研究表明，这种n元数理论对于物理理论的发展似乎有着导向作用。四元数如果用在爱因斯坦的相对论中，可以很方便地表示它的张量变换；用在量子力学中，它可以方便表示粒子的自旋等性质。而八元数在诸如弦理论、狭义相对论和量子逻辑中也有应用[1][2]。因此，研究n元数理论是相当有价值的。

2 行列式

在本文中，矩阵及行列式的几何意义有着重要的作用，因此，有必要先陈述一下矩阵和行列式的几何意义。一个n阶矩阵A可以看成是n个n维列向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$的集合

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \tag{1}$$

从代数的角度来看，这构成了一个矩阵；从几何的角度来看，这n个向量可以建立一个平行n维体。[3]而矩阵的行列式$\det A$ 就是这个平行n维体的体积！详细的论述可以参考本文的附录(A.1)。

3 四元数

3.1 复数的定义

本章我们将从复数的类比出发，结合矩阵，从两个不同的角度得出四元数（Quaternion）的表示理论。首先考虑复数是怎么定义的。历史上复数是作为负数的平方根出现的，然后发现了它的几何意义。但是这里我们采用相反的路径，即从几何出发考虑复数：

1 复数代表着一个二维向量，它的基是1和i；

2 定义$i^2 = -1$，这样就可以像定义实数乘法那样定义复数的乘法了；

3 复数在由上一条定义的乘法中是封闭的，并且满足交换律、结合律和分配律；

[3]平行四边形就是“平行二维体”，平行六面体就是“平行三维体”，高阶的只需要相应类比，不需要真正想象出高维空间的立体是什么样。

然后考虑复数的两点重要性质：

4 $arg(z_1z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

5 $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

第一条代表着旋转，但是在高维空间中，旋转具有多向性，是不明确的；第二条才是我们推广到高维空间要保持的，因为即使在高维中，长度也可以很方便推广，只需要把每个分量的平方加起来再开方就可以了。因此，我们对于四元数，我们就可以定义四元数为$p = a + bi + cj + dk$，其中a, b, c, d是实数，$1, i, j, k$是它的基。它的模是$|p| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$。当然，作为复数的延伸，我们还加上限制：它的$i$ 就是复数中的i。[4]

3.2 复数与矩阵

一个显然的事实是，每个复数$a + bi$与二阶矩阵

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{2}$$

一一对应。为什么用这种形状而不是$\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$之类的形状？是因为这样的矩阵乘法还对应着复数的乘法：[5]

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ bc + ad & ac - bd \end{bmatrix} \tag{3}$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

并且容易检验，矩阵的行列式就是复数的模的平方：

$$|a + bi|^2 = a^2 + b^2 = \det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{4}$$

由于矩阵满足$\det(AB) = (\det A)(\det B)$，所以可以立即得到$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$。以后我们还会用矩阵的这一性质来推导四元数。现在我们来考虑矩阵$M(a, b) = (\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2)$，其中

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \tag{5}$$

[4]但就数而言，这点不是必须的。

[5]当然，取$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$跟$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$没有本质上的不同，只是我们习惯不在第一列添加负号而已。

由这两个向量建立了一个正方形，这个正方形的面积就是$\det M(a,b)$，另外由于正方形的边长是$\sqrt{a^2+b^2}$，所以它的面积显然就等于a^2+b^2。这样就把行列式跟模联系了起来。[6]

3.3 三元数

根据复数规律的类比，如果我们想建立起三元数，并且它满足“积的模等于模的积”，那么就需要找到它的矩阵对应。可以想象，每个三元数应该对应于一个三阶矩阵$M(a,b,c)=(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3)$，其中

$$\boldsymbol{m}_1=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3$只能由$\boldsymbol{m}_1$的保距变换[7]得到，并且与$\boldsymbol{m}_1$ 构成了一个正方体。如果我们的设想能够成功的话，那么该立方体的体积就等于

$$V=\det M(a,b,c)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \tag{7}$$

而两个三元数的乘积对应于$M(a,b,c)M(d,e,f)$，满足

$$\det\left(M(a,b,c)M(d,e,f)\right)=\det\left(M(a,b,c)\right)\det\left(M(d,e,f)\right) \tag{8}$$

左端是积的模的三次方，右端是模的三次方的积，因此这样建立的三元数就满足“积的模等于模的积”。问题是这样的设想能否成立呢？不妨设

$$\boldsymbol{m}_2=A\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_3=B\boldsymbol{m}_1 \tag{9}$$

因为这是保距变换，因此$A^TA=I,B^TB=I$，并且由变换后的正交性得$\boldsymbol{m}_1^TA\boldsymbol{m}_1=0,\boldsymbol{m}_1^TB\boldsymbol{m}_1=0$。由文献[4]知存在某个基，使得$\mathbb{R}^3$的正交变换矩阵为

$$\begin{bmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{10}$$

---

[6] 从一个二维向量(a,b)出发，可以与$(-b,a)$构成一个正方形，也能与$(b,-a)$ 构成一个正方形，那么偏要取前者呢？取后者会怎样？事实上，如果取后者，那么对应的向量就是$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，其中$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$。最后的矩阵无法写成$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$的线性组合，因此这不满足封闭性要求。

[7] 保持距离不变的变换，也就是正交变换。

如果

$$(a,b,c)\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

就意味着$a=0$，这退化为二元数。因此三元数是不成立的。

3.4 四元数

让人意外的是，只要再增加一维，四元数就成立了。[8]有两种不同的途径可以得到四元数的表示形式，一种偏向于几何，一种则更侧重于形式。

3.4.1 几何方法

几何方法就是将上面关于二元数和三元数的讨论进一步推广。四维立体我们是没有见过的，但是可以直接把相应的概念类比。每个四元数$p=a+bi+cj+dk$的模是$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$，且它应该对应于一个四阶矩阵$M(a,b,c,d)=(\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3,\boldsymbol{m}_4)$，其中

$$\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{12}$$

而$\boldsymbol{m}_2,\boldsymbol{m}_3,\boldsymbol{m}_4$也是由$\boldsymbol{m}_1$的保距变换得到，并且它们之间两两正交。不需要进行复杂的讨论就可以发现下面的等式是可以成立的

$$a\tilde{a}+b\tilde{b}-c\tilde{c}-d\tilde{d}=0 \tag{13}$$

其中$\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}$是$a,b,c,d$的某个排列，比如$ab-ba+cd-dc=0$，而且不止一种排列使得上式成立。只要花个几分钟摆弄一下，我们就可以得到这样的

[8]我们的时空刚好的四维，这是不是巧合呢？

矩阵[9]

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} = aI + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

如果你摆弄出这个矩阵的话，那么就恭喜你，这个矩阵就是我们的四元数矩阵之一。你只需要检验$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$相互之间的封闭性即可。[10]检验完成后，我们会发现：[11]

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -I, \\ &\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \\ &\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji}, \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj}, \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} \end{aligned} \tag{16}$$

---

[9]当然，你也可能得到诸如$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ d & -c & -b & a \end{bmatrix}$之类的矩阵，主要原因有两个：一是有些表示法是不成立的，我们还需要检验它的封闭性；二是四元数的矩阵表示法并不唯一。

[10]我们的系统本来就是根据模的性质来构造我们的系统的，因此不需要检验$|p_1p_2| = |p_1||p_2|$，它是必然成立的。

[11]有另外的矩阵也满足封闭性，比如$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$，这个矩阵得出$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{k}$的结论。但是跟现有的四元数并没有本质区别。

因此，我们只需要定义如下四元数的运算法则：

$$
\begin{aligned}
&i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\
&ij = k, jk = \boldsymbol{i}, ki = j, \\
&ij = -ji, jk = -kj, ki = -ik
\end{aligned} \tag{17}
$$

就可以构造出我们目前的四元数了。可见，四元数最大的特点在于它的非交换性。[12]

3.4.2 代数方法

上面的几何方法虽然意义明确，但是自由度太大，在构造的时候方向难以把握，并且最终的形式结论也较难记忆。有一个特别生动的代数技巧可以让快捷得到上面的结果。我们继续考虑矩阵(2)，在之前的讨论中，a, b都是实数，如果把它们分别换成复数$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$如何？

$$
M(a,b) = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} \tag{18}
$$

它的行列式是$z_1^2 + z_2^2$，这有点像我们需要的形式，但是这里z_1^2, z_2^2都是复数范围内的，它不是我们想要的$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$的形式。但是只需要稍加改变：

$$
M(a,b) = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ \bar{z_2} & \bar{z_1} \end{bmatrix} \tag{19}
$$

那么它的行列式就是$z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$了！于是一个满足模性质的可能的四元数矩阵是

$$
M(a,b) = \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix} = aI + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \tag{20}
$$

这里

$$
I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \tag{21}
$$

同样可以得到类似(16)的运算封闭性，进而得到(17)的四元数运算法则。本小节的方法有着方便记忆、易于推广的优点。[13]

[12] 今天我们已经有了矩阵的基础，容易接受非交换代数。但是四元数诞生于向量和矩阵之前，非交换性在当时是革命性的。

[13] 下面我们将会看到它是怎么推广到八元数的。

事实上，几何方法和代数方法得到的结论是等价的，四元数可以用四阶实矩阵或者二阶复矩阵来表示。在物理学中，尤其是在量子力学中，物理学家们偏爱复矩阵表示法。[14]

3.5 一些性质

3.5.1 基本运算

四元数建立在(17)的运算法则之上，同时满足结合律：

$$(p_1p_2)p_3 = p_1(p_2p_3) \tag{22}$$

四元数有类似于复数的共轭，因为

$$(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2 \tag{23}$$

所以

$$(a+bi+cj+dk)^* = a-bi-cj-dk \tag{24}$$

将四元数的写成实数部分与向量部分之和

$$p = v + \boldsymbol{V} \tag{25}$$

其中$v=a, \boldsymbol{V}=bi+cj+dk$。如果$a=0$，那么$p$就叫纯四元数。容易检验

$$(v+\boldsymbol{V})(u+\boldsymbol{U}) = vu - \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{U} + v\boldsymbol{U} + u\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{U} \tag{26}$$

注意点积和叉积出现在四元数乘法中，事实上，点积和叉积就诞生于四元数中，只不过后来物理学家发现它们本身就很重要，把它们分离到向量分析中。

对于复数，我们有欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{27}$$

回忆一下上式的证明，就可以发现证明过程中，只是用到了$i^2=-1$这一点特性，那么就是说，对于任意满足$p^2=-1$的p，都有

$$e^{p\theta} = \cos\theta + p\sin\theta \tag{28}$$

[14]至少它的写法比较简单。

经过计算可以发现，对于四元数$\hat{p} = \frac{bi+cj+dk}{r}, r = \sqrt{b^2+c^2+d^2} \neq 0$，有

$$\left(\frac{bi+cj+dk}{r}\right)^2 = -1 \tag{29}$$

那么对于四元数$p = a + bi + cj + dk = a + r\hat{p}$就有

$$e^p = e^{a+r\hat{p}} = e^a e^{r\hat{p}} = e^a(\cos r + \hat{p}\sin r) \tag{30}$$

改写成更适当的符号：

$$e^{\hat{p}\varphi} = \cos\varphi + \hat{p}\sin\varphi \tag{31}$$

3.5.2 空间旋转

复数的几何应用之一就是它可以便捷地表示平面旋转。用四元数，可以很方便表示三维空间的旋转问题。然而，很遗憾的是，虽然最终的表示法相当简单，但是似乎不存在简单的推导过程。附录给出了用矩阵描述旋转的公式(46)及其推导，读者可以检验，公式(46)跟下面的四元数公式是等价[5]

$$\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{P}_\theta \boldsymbol{Q} \boldsymbol{P}_{-\theta} \tag{32}$$

其中$\boldsymbol{Q}'$是旋转后的坐标，$\boldsymbol{Q}$是旋转前的坐标，它们都是纯四元数。θ是旋转角，而$\boldsymbol{P}_\theta = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{\theta}{2}$，$\boldsymbol{V}$是表示旋转轴的纯四元数，且$|\boldsymbol{V}| = 1$。该公式给我们提供了描述空间旋转最一般的方法。

(32)式的好处还在于用它可以轻松分析两个旋转的合成效果。比如让i, j, k分别代表x, y, z轴，那么先绕x轴旋转$\frac{\pi}{2}$，再绕j轴旋转$\frac{\pi}{2}$，就有

$$\boldsymbol{Q}' = (\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\boldsymbol{Q}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}) \tag{33}$$

这两个运动合成一个运动

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{i+j-k}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi/3}{2} + \sin\frac{2\pi/3}{2}\left(\frac{i+j-k}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned} \tag{34}$$

这说明两个旋转的合成相当于绕轴$\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$旋转$\frac{2\pi}{3}$。

3.5.3 非交换加法

事实上，四元数的诞生不仅仅意味着乘法的不可交换，还意味着加法的不可交换！比如由(31)已经知道$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 和$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，那么

$$\begin{aligned}e^{i\theta+j\theta}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+j\sin\theta)\\&=\cos^2\theta+(i+j)\sin\theta\cos\theta+k\sin^2\theta\end{aligned}\tag{35}$$

而

$$\begin{aligned}e^{j\theta+i\theta}&=(\cos\theta+j\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos^2\theta+(i+j)\sin\theta\cos\theta-k\sin^2\theta\end{aligned}\tag{36}$$

在指数上的加法运算便是非交换加法！当然，非交换加法比非交换乘法限制更大，这极大限制了四元数分析的进一步发展。于是这里就启示我们：在四元数中，一切定律都是可怀疑的。[15]

4 八元数

四元数可以进一步延拓到高维，也许不会让人意外的是：五、六、七元数都不存在，直到把维数增至8时，才能构成一个新的代数系统——八元数。[2]

仿照(3.4.2)节的方法，构造八元数最简单的方法就是将其描述为四元数二阶矩阵

$$\begin{bmatrix}p_1&-p_2\\p_2^*&p_1^*\end{bmatrix}\tag{37}$$

类比(3.4.2)节，这样构造出来的八元数自动满足模的性质，并且满足封闭性。但是很遗憾，这种数不仅仅不满足交换律，还不满足结合律，一般地

$$(AB)C\neq A(BC)\tag{38}$$

这进一步限制了八元数的应用。

[15]必须注意到根据(31)式有$e^{\frac{i+j}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\theta)}=\cos(\sqrt{2}\theta)+\frac{i+j}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\theta)$。因此，四元数指数上的乘法还不满足分配律！这几乎打破了一切常规运算定律了！

5 结束语

在我看来，研究高维的数至少有以下价值：

1、时空变换的高维推广，比如利用四元数可以导出KS变换，这是路径积分解决三维氢原子问题的关键；

2、与物理定律的紧密联系，近年来对八元数的研究发现，八元数可以在最前沿的理论物理——弦理论中发挥作用，这让人不得不联想到，代数系统与时空本质有联系；[7]

3、几何的应用，四元数作为三维空间的旋转伸缩变换描述；

4、数学的美，它将我们对数的认识提升到一个新的高度，使我们对数的理解更加完整、完美。

本文还有诸多不完整之处，还需要进一步探索。仅此此文抛砖引玉。

A 附录

附录包括一些补充论述和推广思想。

A.1 行列式与体积的等价性

让我们考虑矩阵A的行列式$\det A$，我们知道$\det A$有如下性质：

行列式性质 1 行列式是$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$的一个函数，即$\det A = f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$；

行列式性质 2 (线性1) 行列式的某一列乘上常数α，则行列式的值也乘上α，即$f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$；

行列式性质 3 (线性2) 将行列式的某一列写成两列之和，那么行列式也相应地成为两个行列式之和，即$f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + f(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$，其中$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{z}_i$，性质二和三表明$f$是关于每个向量的线性函数；

行列式性质 4 (反对称) 只要有两列相同，那么行列式值为0，即$f(\ldots, \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}, \ldots) = 0$；

行列式性质 5 (归一) 单位矩阵的行列式为1，即$f(I) = 1$。

一个惊人的事实是，行列式可以由上面五条性质唯一确定！即由上面五条性质就可以唯一确定一个函数f，这个函数就是矩阵的行列式。[3]

从几何的角度来看，用这n个向量，可以生成n维空间的一个平行n维体。让我们来考虑这个平行n维体的体积V。只在第一卦限讨论，那么体积具有下面的性质[16]

体积性质 1 体积是这n个向量的一个函数$V(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$；

体积性质 2 将某个向量乘以α，也就是把它的长度变为来说的α倍，那么体积也增大α倍，即$V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$；

体积性质 3 体积是可加的，即$V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + V(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$，其中$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{z}_i$； [17]

体积性质 4 只要有两个向量重合，那么体积自然为*0*，即$V(\ldots, \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}, \ldots) = 0$； [18]

体积性质 5 由单位矩阵I构成的平行n维体是一个n维的单位立方体，它的体积自然是*1*，即$V(I) = 1$。

这表明，在第一卦限中的平行n维体的体积就是对应矩阵的行列式！如果将其放到所有卦限中，那只不过是体积概念的推广（允许为负数）。[19]因此，我们不妨这样定义，体积就是行列式。

A.2 矩阵描述旋转

本节简单介绍用矩阵来描述旋转。首先我们认识到，如果旋转轴是坐标轴之一，那么旋转矩阵将是最简单的，比如向量$\boldsymbol{x} = (x_0, y_0, z_0)^T$绕$z$轴逆时针旋转$\theta$角后的坐标就可以描述为

$$\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{x} \tag{39}$$

[16]只在第一卦限讨论，限保证了所有的向量和因子都是正数。

[17]这点需要稍加验证，但它的确是正确的。

[18]比如在三维空间中的一个立体，有两条边重合，那么说明这个立体已经压缩为一个面了，面的体积自然为0。

[19]事实上，负体积的引入具有重要意义，它是现在的“外微分”的基础之一。外微分一个典型的用处是它可以把高斯积分公式、斯托克斯积分公式等统一起来。

其中

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

如果旋转轴不是坐标轴，而是由单位列向量$\boldsymbol{u} = (x_1, y_1, z_1)$确定，那么同时就确定了与$\boldsymbol{u}$垂直的一个平面，在此平面上找到两个正交的单位列向量$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$，用$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}$就可以建立一个新直角坐标系（右手架），设在此坐标系之下原来的$\boldsymbol{x}$向量的坐标为$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$，则

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]\, \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} \tag{41}$$

在新坐标系下描述旋转是方便的，它就是矩阵(40)。绕$\boldsymbol{u}$轴逆时针旋转θ角后，坐标为

$$\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{R}_\theta\, [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]^{-1}\, \boldsymbol{x} \tag{42}$$

上面是在$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}$坐标系的坐标，变为我们最初的直角坐标系，那就是

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]\, \boldsymbol{R}_\theta\, [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]^{-1}\, \boldsymbol{x} \tag{43}$$

(43)式就是旋转之后的坐标。它描述了三维空间中最一般的旋转。注意矩阵$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]$ 是一个正交矩阵，因此它的逆就是$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{u}^T \end{bmatrix}$，因此旋转后坐标为

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]\, \boldsymbol{R}_\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{e}_2^T \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}]\, \boldsymbol{R}_\theta \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} \end{bmatrix} \tag{44}$$

剩下就是$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e_2}$的确定问题。如果无法很快找出满足条件的两个向量来，那么可以利用向量的叉积：

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x}|}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x})|} = \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{x}|} \tag{45}$$

叉积的好处是明显的，将(45)代入(44)，得到

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|},\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|},\boldsymbol{u}\right]\boldsymbol{R}_\theta\begin{bmatrix}0\\ \frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})^2-\boldsymbol{x}^2}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|}\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}\end{bmatrix}\\
&=\left[\frac{\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|},\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|},\boldsymbol{u}\right]\begin{bmatrix}|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|\sin\theta\\ -|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x}|\cos\theta\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}\end{bmatrix}\\
&=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\sin\theta-[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]\cos\theta+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\\
&=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\sin\theta+[(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{u}]\cos\theta+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}
\end{aligned}\tag{46}
$$

这被称为Rodrigues旋转公式，它是用向量描述三维空间旋转最简单的形式。[6]写成最后的形式是因为它有明显的几何意义，事实上可以完全不用矩阵的分析，只是利用几何方法和向量叉积就可以推导出(46)的最后一式来。另外如果$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{u}$，[20]那么坐标旋转公式将会相当简单：

$$
(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\sin\theta+\boldsymbol{x}\cos\theta \tag{47}
$$

对于四元数描述，根据(26)式有

$$
\begin{aligned}
&\left(\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{x}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
&=\left[\boldsymbol{x}\cos\frac{\theta}{2}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\sin\frac{\theta}{2}+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\sin\frac{\theta}{2}\right]\left(\cos\frac{\theta}{2}-\boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
&=\cos^2\frac{\theta}{2}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\
&\quad-(-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{u})\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\sin^2\frac{\theta}{2}\\
&\quad-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{u}\sin^2\frac{\theta}{2}\\
&=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{x})\sin\theta-[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x}]\cos\theta+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}
\end{aligned}\tag{48}
$$

因此，三维空间的旋转也可以用四元数来描述。

A.3 改变模的定义

为什么模的定义一定要是$\sqrt{a^2+b^2}$呢？在狭义相对论中（设光速$c=1$），关于时空坐标(x,t)在时空变换中保持不变的量是$\sqrt{t^2-x^2}$而不是$\sqrt{t^2+x^2}$，

[20]事实上在实际应用中，这一条件并不算苛刻。

因此，通过改变模的定义，构建一个新的具有独特价值的类复数代数系统是有意义的。

现定义二维向量(t,x)的模为$\sqrt{t^2-x^2}$，我们需要找出类似复数的代数系统，使得两个数的积的模就等于它们的模的积。如果还是采用二阶矩阵的方法，之前我们构造出二阶矩阵(2)，使得它的行列式就是模的平方a^2+b^2。类似地，我们可以构造矩阵

$$S(t,x)=\begin{bmatrix} t & x \\ x & t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

使得它的行列式为t^2-x^2，这样子的矩阵自动满足模的性质。因为$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2=I$，我们设一种新数为

$$t+x\hat{i} \tag{50}$$

其中$\hat{i}^2=1$。除了模的定义为$\sqrt{t^2-x^2}$外，这种新数有很多类似复数的性质，它的共轭是$t-x\hat{i}$，满足$(t+x\hat{i})(t-x\hat{i})=|t+x\hat{i}|^2$，还有类似的欧拉公式

$$e^{\hat{i}\theta}=\cosh\theta+\hat{i}\sinh\theta \tag{51}$$

可见这其实就是三角函数的双曲推广，这种数在表示狭义相对论时相当方便。使用这种新数，洛仑兹变换可以表示为

$$t+x\hat{i}=(t'+x'\hat{i})\frac{1+v\hat{i}}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{(t'+x'v)+(x'+vt')\hat{i}}{\sqrt{1-v^2}} \tag{52}$$

可以考虑它的高维推广问题，在一般的四维空间中模的定义为$\sqrt{t^2-x^2-y^2-z^2}$，具有不对称性。或许可以考虑矩阵

$$\begin{bmatrix} t+x\hat{i} & y-zi \\ y+zi & t-x\hat{i} \end{bmatrix} \tag{53}$$

它的行列式就是$t^2-x^2-y^2-z^2$，但是这涉及到$i\hat{i}=?$的问题，因此有待探索。

A.4 四元数微积分

本节内容引用了网站。[8]

我们知道以复数为变量的复值函数可以做微积分，形成一个理论称为“复分析”，它在纯数学、物理、工程领域都有非常重要的应用。既然四元数是复数的一种扩展，我们是否也可以建立“四元数分析”呢？显然，这里的难点在于非交换性。微积分最基本的概念“导数”是由除法定义的，而四元数乘法除法都依赖于因子或除子的顺序。实践证明这是一个很本质的困难，以至于人们至今还无法建立一个令人满意的“四元数分析”理论。

可见，这是一个有待我们继续尝试的领域。或许，进一步拓展四元数的应用，需要我们紧紧抓住四元数的物理应用，以得到正确的方向。

参考文献

[1] 维基百科：http://zh.wikipedia.org/wiki/四元数

[2] 维基百科：http://zh.wikipedia.org/wiki/八元数

[3] [美]斯蒂芬.弗莱切.休森著;邹建成,杨志辉,刘喜波等译《数学桥》,P124

[4] 张禾瑞,郝鈵新《高等代数》,P329

[5] [美]Tristan Needham著;齐民友译《复分析-可视化方法》,P258

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler－Rodrigues_formula

[7] 《古老数系助力弦论》,《环球科学》,2012年第2期

[8] 科学松鼠会：http://songshuhui.net/archives/69990