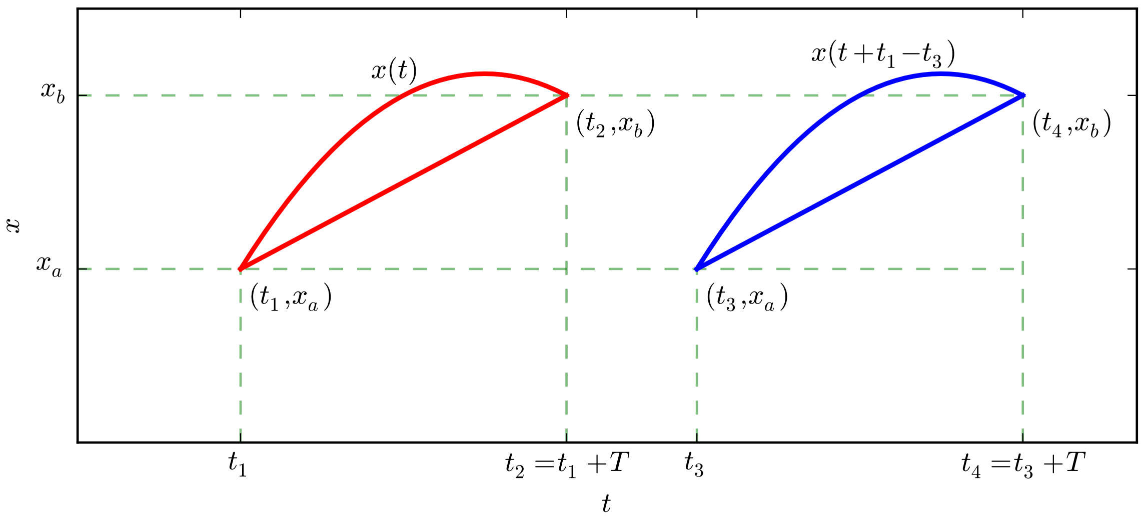


《量子力学与路径积分》习题解答

作者： 苏剑林

版本： V0.2

网址： http://spaces.ac.cn

路径积分习题解答 V0.1

苏剑林

科学空间：http://spaces.ac.cn

2015 年 10 月 17 日

目录

1　第一章 量子力学的基本概念

本章并无习题。

2 第二章 量子力学的运动规律

2.1 2-1 经典作用量

2.1.1 问题 2-1

一个自由粒子，其 $L = m\dot{x}^2/2$。证明自由粒子的经典运动所对应的作用量 S_{cl} 为

$$S_{cl} = \frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \tag{2-8}$$

参考答案：

作用量 $\int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t)dt$ 是关于 $x \equiv x(t)$ 的一个泛函，而所谓经典作用量，就是找出粒子的经典路径 x_{cl}，然后再代入作用量的表达式中去。

对于自由粒子，将 L 代入欧拉 -拉格朗日方程（即 (2-7) 式）得到 $m\ddot{x} = 0$，从而经典运动路径为 $x_{cl}(t) = c_1 t + c_2$，c_1, c_2 是待定常数，常数由边界条件 $x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$ 来确定。最终结果是

$$x_{cl}(t) = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a}\right)t + \frac{t_b x_a - t_a x_b}{t_b - t_a}$$

所以

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2}m\dot{x}_{cl}^2(t)dt = \frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}$$

2.1.2 问题 2-2

一个谐振子，其 $L = (m/2)(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$。令 $T = t_b - t_a$，证明其经典作用量为

$$S_{c1} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right] \tag{2-9}$$

参考答案：

本问题的计算思路跟问题 2-1 是一样的，只不过计算上更加复杂。为了不至于让符号太多，我们设 $m = \omega = 1$，随后我们可以通过检查量纲来恢复这两个变量。此时 $L = (\dot{x}^2 - x^2)/2$，变分得到经典运动方程 $\ddot{x} + x = 0$，其中通解包含两个待定常数，同样由边界条件 $x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$ 来确定。

已经知道对于任意常数 c，$\sin(t + c)$ 都是 $\ddot{x} + x = 0$ 的解，因此考虑到边界条件，我们使用如下格式的通解

$$x_{cl}(t) = c_1\sin(t - t_a) + c_2\sin(t - t_b)$$

该通解在边界点时只有一个常数，因此可以方便地确定两个常数：

$$c_1 = \frac{x_b}{\sin(t_b - t_a)}$$
$$c_2 = \frac{x_a}{\sin(t_a - t_b)}$$

为了算 S_{c1}，我们可以使用分部积分法：

$$\begin{aligned} S_{c1} &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2}(\dot{x}_{cl}^2 - x_{cl}^2)dt \\ &= \frac{1}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\bigg|_{t_a}^{t_b} - \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}(\ddot{x}_{cl} + x_{cl})\,dt \\ &= \frac{1}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\bigg|_{t_a}^{t_b} \\ &= \frac{1}{2}x_b\ \dot{x}_{cl}\big|_{t_b} - \frac{1}{2}x_a\ \dot{x}_{cl}\big|_{t_a} \end{aligned}$$

其中由于经典运动方程 $\ddot{x}_{cl} + x_{cl} = 0$，所以 $\frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}(\ddot{x}_{cl} + x_{cl})\,dt = 0$。这样一来我们就免除了再次进行积分运算。将 $x_{cl}(t)$ 的表达式代入上式，得到

$$S_{c1} = \frac{1}{2\sin T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos T - 2x_a x_b\right]$$

最后我们来把 m 和 ω 恢复，这只需要检查量纲。首先留意 sin 和 cos 部分，三角函数的自变量必须是无量纲的，而目前是时间 T，为了将其变成无量纲的，只需要乘上角速度 ω，因为角速度的量纲是“时间$^{-1}$”。其次，L 是具有能量量纲的，因此作用量 S 量纲是能量量纲乘上时间量纲，也就是“质量 $\times$ 长度^2/时间”。方括号只是长度的平方，因此，需要在外边乘上 $m\omega$（这是一个量纲为“质量/时间”的量），所以，得到

$$S_{c1} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right]$$

2.1.3 问题 2-3

求出常力 f 作用下的一个粒子的 S_{cl}，其拉氏量为 $L = m\dot{x}^2/2 + fx$。

参考答案：

同样，我们设 $m = f = 1$，最后再来恢复它，我们应当熟悉这种方法，它能给我们带来方便。此时，$L = \dot{x}^2/2 + x$，变分作用量，得到经典运动方程 $\ddot{x} = 1$。积分之，可以得到通解

$$x_{cl}(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2$$

这启示我们，可以设 $x_{cl} = y_{cl} + \frac{1}{2}t^2$，或许可以将问题转化为自由粒子的情况。事实正是如此，我们有

$$\begin{aligned} S_{c1} &= \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\right)dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{y}_{cl} + t\right)^2 + \left(y_{cl} + \frac{1}{2}t^2\right)\right]dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{1}{2}\dot{y}_{cl}^2 + t^2 + \underbrace{(y_{cl} + t\dot{y}_{cl})}_{\frac{d}{dt}(ty_{cl})}\right]dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b}\frac{1}{2}\dot{y}_{cl}^2 dt + \frac{1}{3}t^3\bigg|_{t_a}^{t_b} + ty_{cl}\big|_{t_a}^{t_b} \\ &= \int_{t_a}^{t_b}\frac{1}{2}\dot{y}_{cl}^2 dt + \frac{1}{3}(t_b^3 - t_a^3) + (t_b y_b - t_a y_a) \end{aligned}$$

根据我们的设定，$y_a = x_a - \frac{1}{2}t_a^2$, $y_b = x_b - \frac{1}{2}t_b^2$。上式第一项正是自由粒子的作用量，根据问题 2-1，它等于

$$\frac{1}{2}\frac{(y_b - y_a)^2}{t_b - t_a} = \frac{1}{2}\frac{[(x_b - x_a) - \frac{1}{2}(t_b^2 - t_a^2)]^2}{t_b - t_a}$$

所以最终结果是

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{1}{2}\frac{[(x_b - x_a) - \frac{1}{2}(t_b^2 - t_a^2)]^2}{t_b - t_a} + \frac{1}{3}(t_b^3 - t_a^3) + \left[t_b\left(x_b - \frac{1}{2}t_b^2\right) - t_a\left(x_a - \frac{1}{2}t_a^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{[(x_b - x_a) - \frac{1}{6}(t_b^2 - t_a^2)]^2}{t_b - t_a} - \frac{1}{3}(t_b^3 - t_a^3) + (t_b x_b - t_a x_a) \\ &= \frac{(x_b - x_a)^2}{2T} + \frac{T(x_a + x_b)}{2} - \frac{T^3}{24} \end{aligned}$$

其中 $T = t_b - t_a$，我们以后经常会使用这个代换。恢复 m, f 后的结果为

$$S_{cl} = \frac{m(x_b - x_a)^2}{2T} + \frac{fT(x_a + x_b)}{2} - \frac{f^2T^3}{24m}$$

2.1.4 问题 2-4

按照经典力学，动量定义为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \qquad (2-10)$$

证明端点的动量为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_b} = \frac{\partial S_{cl}}{\partial x_b} \qquad (2-11)$$

以及

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_a} = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a}$$

参考答案：

这个问题相当于把 x_b 换成随时变化的 x，也就是说，我们考虑

$$S_{cl}(x) = \int_{t_a}^{t_b} L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)dt, \quad x(t_a) = x_a, x(t_b) = x$$

对 x 求导：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}S_{cl}(x) &= \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial \dot{x}_{cl}}{\partial x}\right)dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial x_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}dt + \int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}d\left(\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}\right) \quad \text{(接着对后一项用分部积分)} \\ &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}\right|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right)}_{\text{请回忆“欧拉 -拉格朗日方程”}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}dt \\ &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}\right|_{t_a}^{t_b} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial(x_{cl}|_{t_a}^{t_b})}{\partial x} \quad \text{(这一步是因为 } t_a, t_b, x_a, x \text{ 之间是相互独立的)} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial(x - x_a)}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}} \end{aligned}$$

从而

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_b} = \frac{\partial S_{cl}}{\partial x_b}$$

类似可证后一式子。

2.1.5 问题 2-5

按经典力学，能量定义为

$$E = \dot{x}p - L \tag{2-12}$$

证明端点 b 能量的表达式为

$$\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\bigg|_{x=x_b} = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_b} \tag{2-13}$$

以及相应地在端点 a 的能量是 $\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_a}$。

参考答案：

与问题 2-4 类似，考虑 t_b 为任意变化的 τ 时，$S_{cl}(\tau)$ 的导数。

$$S_{cl}(\tau) = \int_{t_a}^{\tau} L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)dt, \quad x(t_a) = x_a, x(\tau) = x_b$$

所以（下面的 L 表示 $L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)|_{t=\tau}$）

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} S_{cl}(\tau) &= L + \int_{t_a}^{\tau} \frac{\partial L}{\partial \tau} dt \quad (\text{注意到 } L \text{ 也是 } \tau \text{ 的函数，因此多一偏导数项}) \\
&= L + \int_{t_a}^{\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial \dot{x}_{cl}}{\partial \tau}\right) dt \quad (\text{接着对后一项用分部积分}) \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t_a}^{\tau} + \int_{t_a}^{\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right)\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} dt \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t_a}^{\tau} \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\bigg|_{t=t_a}\frac{\partial (x_{cl}|_{t=t_a})}{\partial \tau} \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\bigg|_{t=t_a}\frac{\partial x_a}{\partial \tau} \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau}
\end{aligned}$$

上面的最后几步中，因为 t_a 与 τ 无关，所以可以直接交换“取 $t = t_a$”与“对 τ 求导”的顺序，但是不能直接交换“取 $t = \tau$”与“对 τ 求导”的顺序。对于任意 $f(t, \tau)$，我们有

$$\frac{df(\tau, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} + \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau}$$

从而

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\right|_{t=\tau}+\left.\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}\right|_{t=\tau} &= \frac{d}{d\tau}(x_{cl}|_{t=\tau}) \\ &= \frac{d}{d\tau}x_{cl}(\tau) \\ &= \frac{d}{d\tau}(x_b) \\ &= 0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}S_{cl}(\tau) &= L+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\left.\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\right|_{t=\tau} \\ &= L-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\left.\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}\right|_{t=\tau} \\ &= L-\dot{x}_{cl}\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right|_{t=\tau}\end{aligned}$$

至此，$(2-13)$ 式得证。

2.2 2-2 量子力学的几率幅

2.2.1 问题 2-6

规定路径积分的泛函种类可惊人地变化。到目前为止，我们已经考虑了一些泛函，如式 $(2-15)$。这里我们要考虑另一个完全不同的类型。（待完善）

3 第三章 用一些特例阐述概念

3.1 3-1 自由粒子

3.1.1 问题 3-1

一粒子由 a 点到达 b 点的几率，按定义应该正比于传播子 $K(b,a)$ 的平方的绝对值的平方。对于自由粒子传播子式 $(3-3)$，这就是

$$P(b)dx = \frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)}dx \tag{3-6}$$

显然，这是相对几率，因为对 x 的全部区域的积分发散。这种特别的归一化意味着什么？证明，这相应于粒子在 a 点开始运动时的动量为任何值的可能性一样大的经典图像。证明粒子动量在 dp 区间先赢的相对几率是 $dp/2\pi\hbar$。

参考答案：

根据问题 2-1 和问题 2-4，自由粒子的经典动量为

$$p = \frac{\partial S_{cl}}{\partial x} = \frac{m}{2}\frac{x - x_a}{t_b - t_a} \quad (\text{这里 } x = x_b)$$

所以

$$\frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)}dx = P(b)dx$$

可见粒子在区间 dp 的相对几率正比于 $1/2\pi\hbar$，这是一个常数，因此这相应于粒子在 a 点开始运动时的动量为任何值的可能性一样大的经典图像，这意味着自由粒子的动量和位置都是非常不确定的。

3.1.2 问题 3-2

用代入法证明，只要 t_b 大于 t_a，自由粒子传播子 $K(b,a)$ 满足微分方程

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K(b,a)}{\partial t_b} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K(b,a)}{\partial x_b^2} \tag{3-18}$$

参考答案：

只需要依次写出：

$$
\begin{aligned}
K(b,a) &= \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
\frac{\partial K(b,a)}{\partial t_b} &= \frac{\pi i}{m}\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-3/2} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
&\quad - \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)^2} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
&= \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \frac{1}{2(t_b-t_a)} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
&\quad - \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)^2} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
\frac{\partial K(b,a)}{\partial x_b} &= \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \frac{im(x_b-x_a)}{\hbar(t_b-t_a)} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
\frac{\partial^2 K(b,a)}{\partial x_b^2} &= \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \frac{im}{\hbar(t_b-t_a)} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \\
&\quad - \left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2} \frac{m^2(x_b-x_a)^2}{\hbar^2(t_b-t_a)^2} \exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}
\end{aligned}
$$

可见，除了一个常数因子外，$\frac{\partial K(b,a)}{\partial t_b}$ 与 $\frac{\partial^2 K(b,a)}{\partial x_b^2}$ 是对应相等的，所以不难证明式 $(3-18)$

3.2 3-2 通过狭缝的衍射

3.2.1 问题 3-3

将式 $(3-20)$ 中的几率幅平方，再对 x 积分，证明：通过原狭缝的几率是

$$
P(\text{通过}) = \frac{m}{2\pi\hbar T}2b \tag{3-35}
$$

参考答案：

首先写出 $(3-20)$ 式

$$
\begin{aligned}
\psi(x) = \int_{-b}^{b} &\left(\frac{2\pi i\hbar\tau}{m}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau}\right] \\
&\times \left(\frac{2\pi i\hbar T}{m}\right)^{-1/2} \exp\left[\frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T}\right] dy
\end{aligned} \tag{3-20}
$$

然后有

$$
\begin{aligned}
|\psi(x)|^2 =& \psi^*(x)\psi(x) \\
=& \left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)\left(\frac{m}{2\pi\hbar T}\right) \\
&\times \int_{-b}^{b} \exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau}\right] \exp\left[\frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T}\right] dy \\
&\times \int_{-b}^{b} \exp\left[-\frac{im(x-z)^2}{2\hbar\tau}\right] \exp\left[-\frac{im(x_0+z)^2}{2\hbar T}\right] dz
\end{aligned}
$$

为求 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx$，先对 x 积分：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau}-\frac{im(x-z)^2}{2\hbar\tau}\right]dx\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{im(z-y)x}{\hbar\tau}+\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]dx\\
=&2\pi\delta\left(\frac{m(z-y)}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]\quad\left(\text{我们有}\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\right)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx\\
=&\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2\tau T}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}2\pi\delta\left(\frac{m(z-y)}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]\\
&\times\exp\left[\frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T}\right]\exp\left[-\frac{im(x_0+z)^2}{2\hbar T}\right]dydz\\
=&\frac{m^2}{2\pi\hbar^2\tau T}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\delta\left(\frac{m(z-y)}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]\\
&\times\exp\left[\frac{im(y-z)x_0}{\hbar T}+\frac{im\left(z^2-y^2\right)}{2\hbar T}\right]dydz
\end{aligned}$$

记积分区域为 D，D 包含原点。作坐标变换：

$$\begin{cases}u=y-z\\ v=y+z\end{cases}$$

其雅可比行列式为 $\frac{1}{2}$，上述积分变为

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx\\
=&\frac{m^2}{2\pi\hbar^2\tau T}\iint_D\delta\left(-\frac{mu}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{imuv}{2\hbar\tau}+\frac{imux_0}{\hbar T}-\frac{imuv}{2\hbar T}\right]\frac{1}{2}dudv\\
=&\frac{m}{4\pi\hbar T}\iint_D\delta\left(u\right)\exp\left[\frac{imuv}{2\hbar\tau}+\frac{imux_0}{\hbar T}-\frac{imuv}{2\hbar T}\right]dudv\\
=&\frac{m}{4\pi\hbar T}\int_{-2b}^{2b}dv\quad(\text{由于 }\delta(u)\text{ 的存在，只取 }u=0\text{ 这一区域，即一条直线。})\\
=&\frac{m}{4\pi\hbar T}4b=\frac{m}{2\pi\hbar T}2b
\end{aligned}$$

3.3 3-4 波函数

3.3.1 问题 3-4

假若一个自由粒子在 $t=0$ 时有确定的动量（即波函数为 $Ce^{ipx/\hbar}$）。借助于式 $(3-3)$ 和 $(3-42)$ 证明：在以后的某时刻，这个粒子仍有同一固定的动量（即波函数通过 $Ce^{ipx/\hbar}$ 与 x 相关)，并且随时间的变化正比于 $e^{-i(p^2/2m\hbar)t}$。这意味着粒子有确定的能量 $p^2/2m$。

参考答案：

根据 $(3-3)$ 式，有

$$K(x,t;y,0)=\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}$$

根据 $(3-42)$ 式，有

$$\begin{aligned}
\psi(x,t)=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\cdot\exp(ipy/\hbar)dy\\
=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left[x^2+y^2+2(pt/m-x)y\right]dy\\
=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left[\left(2ptx/m-p^2t^2/m^2\right)+\left(y+pt/m-x\right)^2\right]dy\\
=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left(2ptx/m-p^2t^2/m^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left(y+pt/m-x\right)^2dy\\
=&C\exp\frac{im}{2\hbar t}\left(2ptx/m-p^2t^2/m^2\right)\\
=&Ce^{ipx/\hbar}e^{-i(p^2/2m\hbar)t}
\end{aligned}$$

3.3.2 问题 3-5

应用问题3-2 的结果和式 $(3-42)$ 证明：波函数满足方程：

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\tag{3-42}$$

这是自由粒子的薛定谔方程。

参考答案：

根据问题3-2，我们有

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$$

其中 $K=K(x,t;y,t_0)$，任意给定初始的波函数 $\psi(y,t_0)$，我们有

$$-\int\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial t}\psi(y,t_0)dy=-\int\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\psi(y,t_0)dy$$

由于求偏导数的变量和求积分的变量无关，因此求积分和求偏导数的次序可以交换：

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\int K\psi(y,t_0)dy}{\partial t}=-\int\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\int K\psi(y,t_0)dy}{\partial x^2}$$

根据 $(3-42)$ 式，积分部分正好是任意时刻的波函数 $\psi(x,t)$，所以

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

3.4 3-5 高斯型积分

3.4.1 问题 3-6

由于自由粒子拉氏量是二次型的，证明（问题2-1）

$$K(b,a)=F(t_b,t_a)\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\tag{3-52}$$

并且论述证明 F 只可能与时间的差值有关，即 $F(t_b,t_a)=F(t_b-t_a)$。

参考答案：

由于自由粒子拉氏量是二次型的，所以可以用 $(3-51)$ 式来求传播子，也就是：

$$K(b,a)=F(t_b,t_a)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}[b,a]\right) \tag{3-51}$$

根据问题2-1，自由粒子的经典作用量 $S_{cl}[b,a]$ 为

$$S_{cl}[b,a]=\frac{m}{2}\frac{(x_b-x_a)^2}{t_b-t_a}$$

代入即得 $(3-52)$。下面来论述 $F(t_b,t_a)=F(t_b-t_a)$。

事实上，可以论证更一般的结论：

对于拉氏量中不显含有 t 的情形，其传播子 $K(b,a)$ 均只可能与时间的差值有关，即 $K(b,a)=K(x_b,t_b;x_a,t_a)=K(x_b,x_a,t_b-t_a)$。换句话说，我们不可能知道做实验的绝对时间！

为此，我们考虑如下两个系统：

$$S_{\text{系统 }1}=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt \quad \text{和} \quad S_{\text{系统 }2}=\int_{t_3}^{t_4}L(x,\dot{x})dt$$

两个系统的 L 是一样的，并且都不显含 t，区别在于系统 1 的端点为 (t_1,x_a) 和 (t_2,x_b)，系统 2 的端点为 (t_3,x_a) 和 (t_4,x_b)，t_1 与 t_3、t_2 与 t_4 不一定相等，但是保持 $t_4-t_3=t_2-t_1=T$。不管是量子力学还是经典力学，系统的所有性质由所给出的作用量 S 确定，换言之，$S_{\text{系统 }1}$ 和 $S_{\text{系统 }2}$ 包含了这两个系统自身所有的经典力学性质和量子力学性质。现在就来考虑两个系统对应的路径积分。

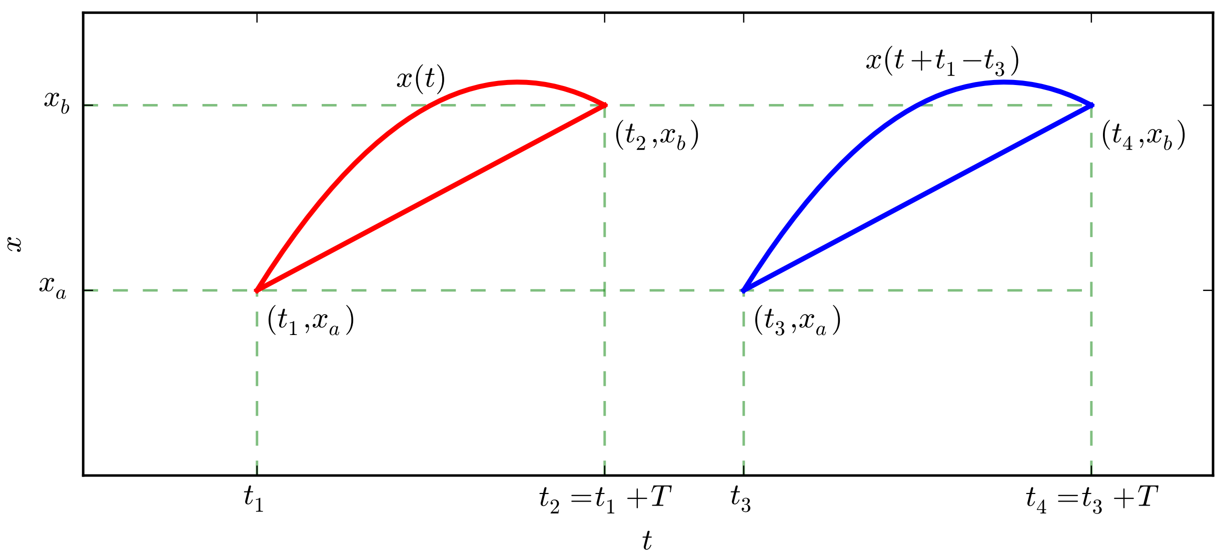


图 1: 考虑两个不同的但类似的系统

路径积分是要把两时空点之间所有的路径按 $e^{iS/\hbar}$ 叠加起来，从图 1 可以看出，系统 1 的每条路径（如 $x(t)$）都与系统 2 的某条路径（如 $x(t+t_1-t_3)$）一一对应，它们仅仅相差一个平移。而对于系统 1 的 $x(t)$ 和系统 $2x(t+t_1-t_3)$，考虑它们的作用量：

$$S[x(t)]=\int_{t_1}^{t_2}L(x(t),\dot{x}(t))dt \quad \text{和} \quad S[x(t+t_1-t_3)]=\int_{t_3}^{t_4}L(x(t+t_1-t_3),\dot{x}(t+t_1-t_3))dt$$

可以设 $L(x(t),\dot{x}(t))$ 的原函数为 $F(t)$[1]，因此

$$\begin{aligned}S[x(t)] =&F(t)|_{t_1}^{t_2} = F(t_2) - F(t_1)\\ S[x(t+t_1-t_3)] =&F(t+t_1-t_3)|_{t_1}^{t_2}\\ =&F(t_4+t_1-t_3) - F(t_3+t_1-t_3)\\ =&F(t_2) - F(t_1) = S[x(t)]\end{aligned}$$

因此，系统 1 的每条路径（如 $x(t)$）都与系统 2 的某条路径（如 $x(t+t_1-t_3)$）一一对应，并且路径的作用量相同（这意味着两条路径对各自传播子的贡献是相同的）——结论就是：两个系统的传播子是一样的！我们无法区分它们！由于 t_1,t_3 是任意的，所以传播子不可能跟它们有关，唯一固定的时间变量是时间差 T，因此，传播子只可能是 T 的函数。

上述仅仅是论证，不能算是证明，但是写出严格的数学证明是不必要的。因为这里的路径积分的定义，本身都是不严格的，我们只是凭借着已知的数学基础和物理直觉来得到这些结论。

回到原题，自由粒子的拉氏量不显含 t，因此它的传播子 $K(b,a) = F(t_b,t_a)\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}$ 只能是时间差 t_b-t_a 的函数，因此 $F(t_b,t_a)$ 只能是时间差 t_b-t_a 的函数。

3.4.2 问题 3-7

关于 F 的进一步的信息可以由式 $(2-31)$ 表示的性质获得。首先注意，问题3-6 的结果意味着 $F(t_b-t_a)$ 可以写成 $F(t)$，其中 t 是时间间隔 t_b-t_a。通过在式 $(3-52)$ 中应用这种形式的 F，再代入式 $(2-31)$，用 $F(t)$ 和 $F(s)$ 表示 $F(t+s)$，其中 $t=t_b-t_c, s=t_c-t_a$。证明，若将 F 写为

$$F(t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} f(t) \tag{3-53}$$

则新函数 $f(t)$ 必然满足

$$f(t+s) = f(t)f(s) \tag{3-54}$$

这意味着，$f(t)$ 必定具有下述形式：

$$f(t) = \exp(at) \tag{3-55}$$

其中 a 可以是复数，即 $a=\alpha+i\beta$。由我们至此所建立的原则出发，很难得到关于函数 $f(t)$ 的进一步的信息。然而，按式 $(2-21)$ 中的定义而特殊选定的归一化常数 A 意味着，近似到 ϵ 的第一阶有 $f(\epsilon)=1$。这相应于在式 $(3-55)$ 中令 a 等于零。$F(t)$ 的结果与式 $(3-3)$ 一致。

参考答案：

对于自由粒子的传播子，由问题3-5 我们已经确定了它与 x_a,x_b 有关的部分，剩下一个只与 t_b-t_a 相关的因此，因此，将它代进 $(2-31)$ 中，可以先完成对 x_c 的积分，换言之（为了减少变量个数，我

[1]不管我们能不能把它求出来，但是理论上它是存在的。相应地，$L(x(t+t_1-t_3),\dot{x}(t+t_1-t_3))$ 的原函数就是 $F(t+t_1-t_3)$。

们让 $m = \hbar = 1$）：

$$
\begin{aligned}
F(t+s)\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)} =& K(b,a)\\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} K(b,c)K(c,a)dx_c\\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\exp\frac{i(x_b-x_c)^2}{2t}\cdot F(s)\exp\frac{i(x_c-x_a)^2}{2s}dx_c\\
=& F(t)F(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{i(x_b-x_c)^2}{2t}\exp\frac{i(x_c-x_a)^2}{2s}dx_c
\end{aligned}
$$

可以直接完成上述积分，这需要把指数展开，然后配平方，过程中的系数会比较复杂，但是没有本质上的困难[2]。结果是：

$$
\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)}
$$

因此

$$
F(t+s) = F(t)F(s)\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}} = F(t)F(s)\sqrt{\frac{(2\pi it)(2\pi is)}{2\pi i(t+s)}}
$$

所以可以设 $F(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi it}}f(t)$（恢复 $m,\hbar$ 后正好是 $(3-53)$ 式），得到 $(3-54)$ 式

$$
f(t+s) = f(s)f(t)
$$

这是关于 $f(t)$ 的函数方程，指数函数是它的唯一解[3]，因此 $f(t)$ 可以一般地写成 $(3-55)$ 式

$$
f(t) = \exp(at)
$$

完整而正确的答案是 $a=0$，但是这里我们无法得到这一结果了。

可见，如果传播子仅仅确定到相差一个只与 t 相关的因子 $f(t)$，那么我们可以通过 $(2-31)$ 式得到关于 $f(t)$ 的一个函数方程，通过求解函数方程的方式可以进一步确定 $f(t)$ 的部分信息——一般来说是相差一个复常数因子。后面将通过更加有力的方式得到这一因子（参考第四章）。

3.5 3-6 势场中的运动

本节的问题的主要核心是经典作用量的计算，因此，它更像节 2-1 的问题。

[2] 但是读者如果熟悉傅里叶变换，我们可以偷偷懒。设 $y = x_c - x_a$，则

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{i(x_b-x_c)^2}{2t}\exp\frac{i(x_c-x_a)^2}{2s}dx_c = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{i(x_b-x_a-y)^2}{2t}\exp\frac{iy^2}{2s}dy
$$

上式正好是函数 $\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2t}$ 和 $\exp\frac{ix^2}{2s}$ 的卷积，根据傅里叶变换的性质，卷积的傅里叶变换等于傅里叶变换的乘积，而 $\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2t}$ 和 $\exp\frac{ix^2}{2s}$ 的傅里叶变换分别为 $\sqrt{-\frac{2\pi t}{i}}\exp\frac{\omega^2 t}{2i}$ 和 $\sqrt{-\frac{2\pi s}{i}}\exp\frac{\omega^2 s}{2i}$ 因此上述积分的傅里叶变换等于

$$
\sqrt{-\frac{2\pi t}{i}}\exp\frac{\omega^2 t}{2i}\sqrt{-\frac{2\pi s}{i}}\exp\frac{\omega^2 s}{2i} = 2\pi i\sqrt{ts}\exp\frac{\omega^2(t+s)}{2i}
$$

即，所以所求积分等于上式的逆傅里叶变换，即

$$
\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)} = \sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)}
$$

[3] 从数学角度来看，这种说法欠缺准确性，只有加上连续性要求——$f(t)$ 关于 t 是连续的，才能证明指数函数是唯一解。当然，从物理角度讲，我们认为这种连续性是“显然成立”的。

3.5.1　问题 3-8

谐振子的拉格朗日量是

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{3-58}$$

证明所得的传播子是（参看问题2-2）

$$K=F(T)\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[(x_a^2+x_b^2)\cos\omega T-2x_ax_b\right]\right\} \tag{3-59}$$

式中 $T=t_b-t_a$。注意，相乘函数 $F(T)$ 的显式并没有得出来。用其他方法可以获得它，并且对于谐振子，它是（参考节 3-11）

$$F(T)=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2} \tag{3-60}$$

参考答案：

在问题2-2 中我们已经求出对于谐振子 $(3-58)$ 的经典作用量为 $(2-9)$

$$S_{c1}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_a^2+x_b^2)\cos\omega T-2x_ax_b\right]$$

而作用量是二次型的，因此它具有精确的表达式 $(3-59)$

$$K=F(T)\exp\frac{iS_{cl}}{\hbar}=F(T)\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[(x_a^2+x_b^2)\cos\omega T-2x_ax_b\right]\right\}$$

至于 $F(T)$ 的进一步信息，需要利用下一节的方法才能继续求解。当然，有毅力的读者可以仿照问题3-7，利用式 $(2-31)$ 得到关于 $F(T)$ 的函数方程。但我不是特别建议读者去做这件事情。

3.5.2　问题 3-9

找出在恒定外场 f 中运动的粒子的传播子，其拉格朗日量为

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2+fx \tag{3-61}$$

结果是

$$K=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x_b-x_a)^2}{2T}+\frac{fT(x_a+x_b)}{2}-\frac{f^2T^3}{24m}\right]\right\} \tag{3-62}$$

其中 $T=t_b-t_a$。

参考答案：

在问题2-3 中我们已经求出对于拉氏量 $(3-61)$ 的经典作用量为

$$S_{c1}=\frac{m(x_b-x_a)^2}{2T}+\frac{fT(x_a+x_b)}{2}-\frac{f^2T^3}{24m}$$

而作用量是二次型的，因此它具有精确的表达式

$$K=F(T)\exp\frac{iS_{cl}}{\hbar}=F(T)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x_b-x_a)^2}{2T}+\frac{fT(x_a+x_b)}{2}-\frac{f^2T^3}{24m}\right]\right\}$$

为了确定 $F(T)$，只需要留意到，式 $(3-50)$ 意味着

$$F(t_b,t_a)=\int_0^0\exp\left\{\int_{ta}^{t_b}\left[a(t)\dot{y}^2+b(t)\dot{y}y+c(t)y^2\right]dt\right\}\mathscr{D}y(t)$$

注意到被积函数 $a(t)\dot{y}^2+b(t)\dot{y}y+c(t)y^2$ 仅仅包含了二次幂的项，换言之，诸如 $f(t)x$ 的一次幂的项，并不影响 $F(t_b,t_a)$，因此，在问题3-9 中，$F(T)$ 等于不存在 fx 项时（即自由粒子）的结果，因此

$$F(T)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}$$

至此已经得到 $(3-62)$。

3.5.3 问题 3-10

在 z 方向上恒定的外磁场中运动的粒子带电荷 e，质量是 m，其拉格朗日量为

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{eB}{2c}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right) \tag{3-63}$$

证明：所得的传播子是

$$\begin{aligned}K=&\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{3/2}\left(\frac{\omega T/2}{\sin(\omega T/2)}\right)\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\left[\frac{(z_b-z_a)^2}{T}\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\frac{\omega/2}{\tan(\omega T/2)}\right)\left[(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right]+\omega(x_ay_b-x_by_a)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3-64}$$

其中 $T=t_b-t_a,\omega=eB/mc$。

参考答案：

为了简化符号，我们设 $m=eB/c=1$，那么 L 简化为

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)$$

我们的工作分为两步，第一步是求经典作用量，第二步求 $F(T)$。注意到 L 可以分为两部分：一部分是 x,y 相关的，另一部分是 z 的，其中 z 部分 $\frac{1}{2}\dot{z}^2$ 仅仅相当于一个自由粒子，因此可以分离出来，得到

$$K=\left(\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}\exp\frac{i}{2\hbar}\frac{(z_b-z_a)^2}{T}\times K_{x,y}$$

其中 $K_{x,y}$ 是对应于拉氏量

$$L_{x,y}=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)$$

的传播子。出于二次型拉氏量一贯的思路，我们先求它的经典作用量，为此，变分得到经典运动方程：

$$\begin{cases}\ddot{x}=\dot{y}\\ \ddot{y}=-\dot{x}\end{cases}$$

这是一个微分方程组，可以常规地求解它。然而利用复数的技巧我们可以更简便地求解，设 $Z=x+yi$，那么上述方程等价于

$$\ddot{Z}=-i\dot{Z}$$

可以解得

$$Z=C_1+C_2e^{-i(t-t_a-T/2)}\quad \text{(构造对于边界点对称的解。)}$$

其中常数由以下方程确定

$$\begin{cases}x_a+y_ai=Z_a=C_1+C_2e^{iT/2}\\ x_b+y_bi=Z_b=C_1+C_2e^{-iT/2}\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{Z_a - Z_b}{e^{iT/2} - e^{-iT/2}} = \dfrac{Z_a - Z_b}{2i\sin(T/2)} \\ C_1 = \dfrac{1}{2}[Z_a + Z_b - C_2(e^{iT/2} + e^{-iT/2})] = \dfrac{1}{2}\left[Z_a + Z_b - \dfrac{Z_a - Z_b}{i\tan(T/2)}\right] \end{cases}$$

（后面的过程告诉我们，没必要把 C_1 求出来。）再看 $L_{x,y}$，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) &= \frac{1}{2}\dot{Z}\dot{\bar{Z}} \\ \frac{1}{2}\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right) &= \frac{1}{2}Re\left(-i\bar{Z}\dot{Z}\right) \\ L_{x,y} &= Re\left(\frac{1}{2}\dot{Z}\dot{\bar{Z}} - \frac{1}{2}i\bar{Z}\dot{Z}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} L_{x,y}dt &= Re\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{Z}\dot{\bar{Z}} - \frac{1}{2}i\bar{Z}\dot{Z}\right)dt \\ =& \frac{1}{2}Re\left[\dot{Z}\bar{Z}\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}\left(\ddot{Z} + iZ\right)\bar{Z}dt\right] \\ =& \frac{1}{2}Re\left(\dot{Z}\bar{Z}\Big|_{t_a}^{t_b}\right) \\ =& \frac{1}{2}Re\left[\frac{Z_a - Z_b}{2\sin(T/2)}\left(-e^{-iT/2}\bar{Z}_b + e^{iT/2}\bar{Z}_a\right)\right] \\ =& \frac{1}{2}Re\left[\frac{Z_a - Z_b}{2\sin(T/2)}\left(-e^{-iT/2}\left(\bar{Z}_b - \bar{Z}_a\right) + \left(e^{iT/2} - e^{-iT/2}\right)\bar{Z}_a\right)\right] \\ =& \frac{1}{2}Re\left[-\frac{\left|Z_a - Z_b\right|^2}{2\sin(T/2)}e^{-iT/2} + i\left(Z_a\bar{Z}_a - Z_b\bar{Z}_a\right)\right] \\ =& \frac{1}{4\tan(T/2)}\left|Z_a - Z_b\right|^2 - \frac{1}{2}Re\left(iZ_b\bar{Z}_a\right) \\ =& \frac{1}{4\tan(T/2)}\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right] + \frac{1}{2}(x_a y_b - x_b y_a) \end{aligned}$$

上述运算过程的困难之处在于仔细明辨哪些项是实数，哪些项是纯虚数，以达到化简的目的，一旦做到了这一点，就不是特别复杂了。所以

$$K_{x,y} = F(T)\exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\left[\left(\frac{1/2}{\tan(T/2)}\right)\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right] + (x_a y_b - x_b y_a)\right]\right\}$$

接着可以代入 K 的表达式，恢复量纲，求得

$$\begin{aligned} K = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} F(T)\exp\Bigg\{\frac{im}{2\hbar}\Bigg[&\frac{(z_b - z_a)^2}{T} \\ &+ \left(\frac{\omega/2}{\tan(\omega T/2)}\right)\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right] + \omega(x_a y_b - x_b y_a)\Bigg]\Bigg\} \end{aligned}$$

$F(T)$ 的表达式需要利用后面的方法才能进一步求解得到。

本题也表名，在处理磁场中运动的相关问题之时，可以适当地利用复数来起到化简的效果。因为通过特殊的选定，复数乘积的实部或者虚部，都可以表示二维的叉积。

3.5.4 问题 3-11

假定问题 3-8 种的谐振子被外力 $f(t)$ 驱动，其其拉格朗日量为

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 + f(t)x \tag{3-65}$$

证明：所得的传播子是 $(T = t_b - t_a)$

$$K = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right)$$

其中

$$\begin{aligned}S_{cl} =&\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T - 2x_bx_a\right.\\&+\frac{2x_b}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b}f(t)\sin\omega(t-t_a)dt + \frac{2x_a}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b}f(t)\sin\omega(t_b-t)dt\\&\left.-\frac{2}{m^2\omega^2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t}f(t)f(s)\sin\omega(t_b-t)\sin\omega(s-t_a)dsdt\right]\end{aligned} \tag{3-66}$$

最后这一结果在许多高深问题中非常重要。它在量子电动力学中有许多特殊的应用，因为电磁场可以表示为一组受迫谐振子。

参考答案：

显然，问题的难度仍然是求 S_{cl}，因为根据问题 3-9 中参考答案所讨论的，前面的因子 $F(T)$ 等于没有 $f(t)x$ 项时的 $F(T)$，也就是谐振子时的 $F(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}}$（参考问题 3-8）。

接着求 S_{cl}。事实上，笔者觉得由 $(3-66)$ 式给出的形式不是特别优美的。下面会给出较为一般的形式。

为了简化记号，我们将令 $m=\omega=1$。首先求解经典运动方程，变分的结果得到：

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

这是一道二阶线性常微分方程，带有非齐次项。我们已经知道，这种方程的通解是对应的齐次方程的通解加上原方程的一个特解。因此，我们将它表示成

$$x(t) = x_c(t) + y(t)$$

其中 $x_c(t)$ 正式对应的齐次解，且 $x_c(t_a) = x_a, x_c(t_b) = x_b, y(t_a) = y(t_b) = 0$，也就是说，边界条件由 $x_c(t)$ 来拟合。代入到 L 中去，有

$$\begin{aligned}L =&\frac{1}{2}\left(\dot{x}_c+\dot{y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_c+y\right)^2 + f(t)\left(x_c+y\right)\\=&\left(\frac{1}{2}\dot{x}_c^2 - \frac{1}{2}x_c^2\right) + f(t)x_c + \left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2 + f(t)y\right) + \left(\dot{x}_c\dot{y} - x_cy\right)\end{aligned}$$

自然有 $S_{cl} = \int Ldt$。可以逐一分析各项，首先第四项可以用分部积分：

$$\begin{aligned}\int_{t_a}^{t_b}\left(\dot{x}_c\dot{y} - x_cy\right)dt =& \dot{x}_cy\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}\left(\ddot{x}_c + x_c\right)ydt\\=&\dot{x}_c(t_b)y(t_b) - \dot{x}_c(t_a)y(t_a) = 0\end{aligned}$$

因此这一项实际是 0。再看第一项，实际上它是自由谐振子的作用量，在问题2-2 中我们已经给出答案，这里记为 S_c

$$S_c = \frac{1}{2\sin T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos T - 2x_a x_b\right]$$

于是

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2 + f(t)y\right)dt$$

问题2-2 中，我们同样已经给出了 $x_c(t)$ 的表达式

$$x_c(t) = \frac{1}{\sin T}\left[x_b\sin(t-t_a) + x_a\sin(t-t_b)\right]$$

因此，第二项也是已知的，唯一未知的是第三项。第三项还可以分部积分化简为

$$\begin{aligned}\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2 + f(t)y\right)dt =& \frac{1}{2}y\dot{y}\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\left[\ddot{y} + y - f(t)\right]ydt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)ydt \\ =& \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)ydt\end{aligned}$$

因此

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)ydt$$

求出第三项需要知道 $\ddot{x} + x = f(t)$ 的一个特解 $y(t)$，满足 $y(t_a) = y(t_b) = 0$。为了求解它，我们利用格林函数技巧。首先求解下述方程

$$\ddot{G}(t,s) + G(t,s) = \delta(t-s), G(t_a,s) = G(t_b,s) = 0$$

其中 $\delta(t)$ 是著名的狄拉克 δ 函数。求出之后，可以代入地证明：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds$$

就是所求的 $y(t)$，并且满足所要求的边界条件。而且一般来说，对于非齐次的线性方程，一般会存在一个格林函数 $G(t,s)$，使得非齐次的方程的解能够表示成 $\int G(t,s)f(s)ds$。求出 $G(t,s)$ 之后，作用量就可以表示成：

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)dsdt$$

请注意，我们研究的是粒子在时间区间 $[t_a, t_b]$ 内的运动，换言之，$f(t)$ 在 $t > t_b$ 或 $t < t_a$ 时是怎么样的，根本不会影响我们所研究的问题，因此，上述积分中，虽然包含了 $\int_{-\infty}^{+\infty}$，而真正对结果会有影响

仅仅是 $\int_{t_a}^{t_b}$ 部分[4]

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b} f(t)G(t,s)f(s)dsdt$$

因此问题就只剩下了求 $G(t,s)$，它已经被很多数学物理教程所求出，答案是：

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t-t_b)\sin(s-t_a)}{\sin T}, & t > s \\ \dfrac{\sin(s-t_b)\sin(t-t_a)}{\sin T}, & t < s \end{cases}$$

积分号是 $\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b}$，也就是说积分区域是有 $t=t_a, t=t_b, s=t_a, s=t_b$ 围成的方形区域，由于 $G(t,s)$ 的分段特点，可以把它以对角线分成两块，分别对应于 $t>s$ 和 $t<s$，分别积分，如图 2 所示。

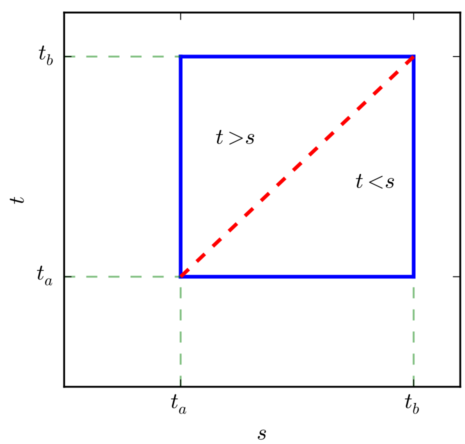


图 2: 划分积分区域

整理积分的结果是

$$\frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b} f(t)G(t,s)f(s)dsdt = \frac{1}{\sin T}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t} f(t)\sin(t-t_b)\sin(s-t_a)f(s)dsdt$$

至此，各个未知的量已经求出，最后综合以上各个步骤，并且恢复 m,ω，可以得到 $(3-66)$ 式。

[4]我们也可以换个更数学的角度来理解它，定义一个新的力：

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), t \in [t_a, t_b] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

在我们所研究的时间区间内，我们并没有办法区别究竟所受外力是 $f(t)$ 还是 $\hat{f}(t)$，因此必然有：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\hat{f}(s)ds \\ &= \int_{t_a}^{t_b} G(t,s)f(s)ds \end{aligned}$$

当然，这也意味着这样所求出来的 $y(t)$ 的有效区间仅仅是 $[t_a, t_b]$。

3.5.5　问题 3-12

若一个谐振子的波函数（在 $t=0$ 时）是

$$\psi(x,0)=\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-a)^2\right] \tag{3-67}$$

则应用式 $(3-42)$ 和问题 3-8 的结果证明：

$$\psi(x,T)=\exp\left\{-\frac{i\omega T}{2}-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2-2axe^{-i\omega T}+a^2\cos(\omega T)e^{-i\omega T}\right]\right\} \tag{3-68}$$

再找出几率分布 $|\psi|^2$。

参考答案：

问题解决的思路很清晰，跟问题 3-4 类似，不外乎就是求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(y-a)^2\right]\times\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[(x^2+y^2)\cos\omega T-2xy\right]\right\}dy$$

同样，为了减少变量，让 $m=\omega=\hbar=1$，那么积分简化为

$$\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{ix^2}{2\tan T}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-a)^2+\frac{i}{2\sin T}\left(y^2\cos T-2xy\right)\right]dy$$

类似的积分我们在问题 3-7 已经做过了，为此，对虚指数部分配方，得到

$$\frac{i}{2\sin T}\left(y^2\cos T-2xy\right)=\frac{i}{2\tan T}\left(x\sec T-y\right)^2-\frac{ix^2}{\sin 2T}$$

所以积分可以转换为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{ix^2}{2\tan T}-\frac{ix^2}{\sin 2T}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-a)^2+\frac{i}{2\tan T}\left(x\sec T-y\right)^2\right]dy\\=&\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{i\tan T}{2}x^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{2\tan T}\left(x\sec T-y\right)^2-\frac{1}{2}(y-a)^2\right]dy\end{aligned}$$

如果令 $s=-i,t=\tan T$，则积分完全就是问题 3-7 中的样子了，直接根据问题 3-7 就可以得到结果

$$\sqrt{\frac{2\pi\tan T}{\tan T-i}}\exp\frac{i(x\sec T-a)^2}{2(\tan T-i)}$$

所以总的结果是

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{i\tan T}{2}x^2\right)\sqrt{\frac{2\pi\tan T}{\tan T-i}}\exp\frac{i(x\sec T-a)^2}{2(\tan T-i)}\\=&\sqrt{\frac{1}{\cos T+i\sin T}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2-2axe^{-iT}+a^2\cos Te^{-iT}\right]\right\}\quad\text{(合并指数，分母实数化，整理)}\\=&\exp\left\{-\frac{iT}{2}-\frac{1}{2}\left[x^2-2axe^{-iT}+a^2\cos Te^{-iT}\right]\right\}\end{aligned}$$

恢复 $m,\omega,\hbar$ 后得到 $(3-68)$ 式。

要注意，$(3-67)$ 式是还没有归一化的，因而 $(3-68)$ 式也并没有归一化。对 $(3-67)$ 式归一化，也就是给 $\psi(x,0)$ 乘上因子

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,0)|^2\,dx\right)^{-1/2}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-a)^2\right]dx\right)^{-1/2}=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}$$

从而完整的 $\psi(x,T)$ 为

$$\psi(x,T)=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\exp\left\{-\frac{i\omega T}{2}-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2-2axe^{-i\omega T}+a^2\cos(\omega T)e^{-i\omega T}\right]\right\}$$

最后，要求的几率分布为

$$|\psi(x,T)|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-a\cos\omega T)^2\right]$$

3.5.6 附：求 $F(T)$ 的方法

前面多次涉及到了求二次型拉氏量的传播子前面的因子 $F(t_b,t_a)$（被称为量子涨落因子），事实上，对于任意的二次型拉氏量 L，这个问题已经完全得到解决，答案是：

$$K(b,a)=\left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{D/2}\sqrt{-\det\left(\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_a\partial x_b}\right)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right)$$

其中 D 是空间的维数，而 $\det\left(\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_a\partial x_b}\right)$ 被称为 van Vleck-Pauli-Morette 行列式。用这个式子，可以快速计算以上几个问题的 $F(T)$。此处不打算对这个结果进行证明。证明过程可以参考《路径积分与量子物理导引：现代高等量子力学初步》，里边还有包含求涨落因子更多的技巧。

3.6 3-11 用傅里叶级数对路径积分求值

3.6.1 问题 3-13

保留所有常数，证明，这意味着，当 N 趋于无限大时，变换系数行列式 J 满足

$$J\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2T}{\pi^2\epsilon}\right)^{(N+1)/2}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\to 1\quad 当N\to\infty \tag{3-94}$$

参考答案：

4 第四章 量子力学的薛定谔描述

4.1 4-1 薛定谔方程

4.1.1 问题 4-1

证明：对于一个在三维势 $V(\boldsymbol{x},t)$ 中运动的粒子，薛定谔方程是

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi \tag{4-13}$$

这个方程是薛定谔在 1925 年发现的，并且自那以后形成了量子力学发展的中心。

参考答案：

事实上，整个证明的框架在本节已经给出，从一维到三维的推广并没有本质上的困难。对应于 $(4-3)$ 式，我们给出

$$\psi(\boldsymbol{x},t+\epsilon)=\frac{1}{B}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\epsilon L\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\epsilon},\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2}\right)\right]\psi(\boldsymbol{y},t)d^3\boldsymbol{y}$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$，而 $d^3\boldsymbol{y}$ 表示三重积分 $dy_1dy_2dy_3$，积分区域是全空间。为了区别，我们这里将常数改为 B。同样地，对于

$$L=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2-V(\boldsymbol{x},t)$$

式 $(4-4)$ 对应于

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t+\epsilon)=&\frac{1}{B}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{2\epsilon}\right]\\&\times\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\epsilon V\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2},t\right)\right]\psi(\boldsymbol{y},t)d^3\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

理由是一样的，作代换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta}$，得到类似 $(4-5)$ 式：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t+\epsilon)=&\frac{1}{B}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{im\boldsymbol{\eta}^2}{2\hbar\epsilon}\right)\\&\times\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\epsilon V\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\eta}}{2},t\right)\right]\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta},t)d^3\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

当 $|\boldsymbol{\eta}|$ 是 $\sqrt{\epsilon\hbar/m}$ 量级时，第一个指数的相位改变为一弧度的量级，因此，积分的大部分贡献来源于这个量级的 $\boldsymbol{\eta}$。对 ψ 作展开，保留 ϵ 量级的项，结果类似 $(4-6)$ 式：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t)+\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=&\frac{1}{B}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{im\boldsymbol{\eta}^2}{2\hbar\epsilon}\right)\\&\times\left[1-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(\boldsymbol{x},t)\right]\left[\psi(\boldsymbol{x},t)+(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\psi+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)^2\psi\right]d^3\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

对于主项

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{im\boldsymbol{\eta}^2}{2\hbar\epsilon}\right)d^3\boldsymbol{\eta}=\iiint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{im(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)}{2\hbar\epsilon}\right]d\eta_1d\eta_2d\eta_3=A^3$$

这也意味着 $B=A^3$，事实上对于 D 维空间有 $B=A^D$。而对于一次项：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{im\boldsymbol{\eta}^2}{2\hbar\epsilon}\right)(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\psi d^3\boldsymbol{\eta}=0\quad\text{[对各分量展开分别积分即可，用到 (4-9)]}$$

接着是二次项：

$$(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)^2=\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\eta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+2\eta_1\eta_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+2\eta_2\eta_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+2\eta_3\eta_1\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1}$$

可以证明：

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{im(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)}{2\hbar\epsilon}\right]\eta_i\eta_j d\eta_i d\eta_j=0\quad(i,j=1,2,3,\ i\neq j)$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{im\boldsymbol{\eta}^2}{2\hbar\epsilon}\right)(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)^2\psi d^3\boldsymbol{\eta}\\=&\iiint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{im\boldsymbol{\eta}^2}{2\hbar\epsilon}\right)\left(\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\eta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\psi d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3\\=&\frac{i\hbar}{m}A^3\epsilon\nabla^2\psi\end{aligned}$$

于是类似 $(4-11)$ 式，有

$$\psi+\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=\psi-\frac{i}{\hbar}\epsilon V\psi+\frac{i\hbar\epsilon}{2m}\nabla^2\psi$$

约去 ψ，上式是对小 ϵ 的近似式，当 $\epsilon\to 0$ 时，上式是精确成立的，因此上式等价于微分方程

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi\qquad(4-13)$$

这就是三维空间的薛定谔方程。

4.1.2 问题 4-2

一个带电粒子在电磁场中，其拉格朗日量是

$$L=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2+\frac{e}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)-e\phi(\boldsymbol{x},t)\qquad(4-17)$$

其中 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 是速度矢量，e 是电荷，c 是光速，$\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 是矢势和标势，证明：相应的薛定谔方程是：

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\psi+e\phi\psi\qquad(4-18)$$

于是，哈密顿量是

$$H=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+e\phi\qquad(4-19)$$

参考答案：

简单起见，我们令 $e=c=\hbar=m=1$。模仿问题 4-1，我们有类似 $(4-4)$ 式：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t+\epsilon)=&\frac{1}{A^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{2\epsilon}\right]\exp\left[i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2},t\right)\right]\\&\times\exp\left[-i\epsilon\phi\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{2},t\right)\right]\psi(\boldsymbol{y},t)d^3\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

作代换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta}$，有

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t+\epsilon)=&\frac{1}{A^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{i\boldsymbol{\eta}^2}{2\epsilon}\right)\exp\left[i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\eta}}{2},t\right)\right]\\&\times\exp\left[-i\epsilon\phi\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\eta}}{2},t\right)\right]\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\eta},t)d^3\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

展开至 ϵ 的一阶项，这意味着对于 $\boldsymbol{\eta}$ 是展开至 $|\boldsymbol{\eta}|^2$，首先指出

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\eta}}{2},t\right)=\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A})$$

完整的展开式是

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t)+\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=&\frac{1}{A^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{i\boldsymbol{\eta}^2}{2\epsilon}\right)\exp\left[i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A})\right]\\&\times\left[1-i\epsilon\phi\left(\boldsymbol{x},t\right)\right]\left[\psi+(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\psi+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\right)^2\psi\psi\right]d^3\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

这里的展开还没完全充分，其中 $\exp\left[\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A})\right]$ 还可以展开为

$$1+\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A})$$

现在，紧接着的一个疑问就是：究竟哪些项该展开，那些项不该展开？为什么 $\exp\left(i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}\right)$ 不一起展开为 $1-i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}$？这里读者要明确的是，展开的是 ϵ 的一阶项，也就是 $|\boldsymbol{\eta}|^2$ 的二阶项，只有这个量级的才能用于近似展开，而前面的 $\exp\left(\frac{i\boldsymbol{\eta}^2}{2\epsilon}\right)$ 和 $\exp\left(i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}\right)$ 项都不在这个量级中。

那么，完整的展开式应该是：

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t)+\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=&\frac{1}{A^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{i\boldsymbol{\eta}^2}{2\epsilon}\right)\exp\left(i\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A}\right)\\&\times\left[1+(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\right)^2+\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{A})-i\epsilon\phi\left(\boldsymbol{x},t\right)\right]\psi d^3\boldsymbol{\eta}\end{aligned}$$

使用配方法，即设 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}-\epsilon\boldsymbol{A}$，保留一阶项得

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{x},t)+\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{A^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{i\boldsymbol{\xi}^2}{2\epsilon}\right)\times&\left[1+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla-\epsilon\boldsymbol{A}\cdot\nabla+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\right)^2\right.\\&\left.+\frac{1}{2}i\epsilon\boldsymbol{A}^2+\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{A})-i\epsilon\phi\left(\boldsymbol{x},t\right)\right]\psi d^3\boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

用类似问题 4-1 所涉及的积分，可以逐步完成，结果是

$$\psi+\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=\psi-\epsilon\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi+\frac{1}{2}i\epsilon\nabla^2\psi+\frac{1}{2}i\epsilon\boldsymbol{A}^2\psi-\frac{1}{2}\epsilon(\nabla\cdot A)\psi-i\epsilon\phi\psi$$

约去 ψ，上式是对小 ϵ 的近似式，当 $\epsilon\to0$ 时，上式是精确成立的，因此上式等价于微分方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\nabla^2\psi-i\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi-\frac{1}{2}i(\nabla\cdot A)\psi-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\psi+\phi\psi$$

注意到

$$2\boldsymbol{A}\cdot\nabla+\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla$$

因此，上述方程可以更加紧凑地写成

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\left(\nabla-i\boldsymbol{A}\right)\left(\nabla-i\boldsymbol{A}\right)\psi+\phi\psi$$

恢复量纲后可以写成 $(4-18)$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\psi+e\phi\psi\qquad(4-18)$$

4.1.3　问题 4-3

将 ψ 中的每个 i 都换成 $-i$，就得到其复共轭函数 ψ^*，证明：ψ^* 满足

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=(H\psi)^* \tag{4-20}$$

参考答案：

其实这道题目很简单，复数具有性质 $(z_1z_2)^*=z_1^*z_2^*$。因此，对薛定谔方程 $-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$ 逐项取共轭就得到 $(4-20)$ 式。

4.1.4　问题 4-4

证明

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}x=x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\frac{\partial}{\partial x} \tag{4-22}$$

因此，对于式 $(4-15)$ 中的 H 有

$$Hx-xH=-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial x} \tag{4-23}$$

参考答案：

这种题目只需要把它作用于任意函数 f：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xf)=&\frac{\partial}{\partial x}\left(f+x\frac{\partial}{\partial x}f\right)\\=&\frac{\partial}{\partial x}f+\left(\frac{\partial}{\partial x}f+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right)\\=&2\frac{\partial}{\partial x}f+x\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\end{aligned}$$

那么，对于式 $(4-15)$ 的 H

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V \tag{4-15}$$

有

$$\begin{aligned}Hx-xH=&\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x+Vx\right)-\left(-\frac{\hbar^2}{2m}x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+xV\right)\\=&-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x-x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\\=&-\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

4.1.5　问题 4-5

使用关系

$$K(b,a)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(b,c)K(c,a)dx_c \tag{4-26}$$

以及 $t_c-t_a=\epsilon$ 是一无限小量，证明：若 t_b 大于 t_a，则传播子 K 满足

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_a}K(b,a)=H_a^*K(b,a) \tag{4-27}$$

参考答案：

首先对比式 $(4-27)$ 与问题4-3 的式 $(4-20)$，发现两者的方程式一样的。因此可以猜测，证明本题的关键是找出哪里出现了“共轭”。

根据式 $(4-26)$，我们有

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_b;x_c,t_c)K(x_c,t_c;x_a,t_a)dx_c$$

令 $t_c-t_a=\epsilon$ 是一个无穷小量,那么传播子 $K(x_c,t_c;x_a,t_a)$ 可以近似地正比于 $\exp\left[\frac{i}{\hbar}\epsilon L\left(\frac{x_c-x_a}{\epsilon},\frac{x_c+x_a}{2}\right)\right]$，因此，上式近似为

$$K(x_b,t_b;x_a,t_c-\epsilon)=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_b;x_c,t_c)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\epsilon L\left(\frac{x_c-x_a}{\epsilon},\frac{x_c+x_a}{2}\right)\right]dx_c$$

设 $\varepsilon=-\epsilon$，那么

$$K(x_b,t_b;x_a,t_c+\varepsilon)=\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_b;x_c,t_c)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon L\left(\frac{x_c-x_a}{\varepsilon},\frac{x_c+x_a}{2}\right)\right]dx_c$$

对比上式与式 $(4-3)$，就会发现，除了将 i 替换 $-i$ 之外，两者的形式是一样的，因此，$\psi(x,t)$ 与 $K(x_b,t_b;x_a,t_c)$ 必然满足同样的方程（即薛定谔方程，其中 x 对应 x_a，t 对应 t_c，ϵ 对应于 ε），唯一的区别就是将 i 换成 $-i$，用数学的语言，也就是取了共轭[5]。因此必然有

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_c}K(x_b,t_b;x_a,t_c)=H_a^*K(x_b,t_b;x_a,t_c)$$

将 t_c 换成 t_a，结果依然成立，因此可以简写成

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_a}K(b,a)=H_a^*K(b,a)$$

4.1.6　问题 4-6

证明：当 $t_b\to t_a+0$ 时，

$$K(b,a)\to\delta(x_b-x_a)$$

参考答案：

利用 $(4-2)$ 式：

$$\psi(x_b,t_b)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_b;x_a,t_a)\psi(x_a,t_a)dx_a \qquad (4-2)$$

让 $t_b\to t_a+0$，即

$$\psi(x_b,t_a+0)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_a+0;x_a,t_a)\psi(x_a,t_a)dx_a$$

左端可以直接取极限得到 $\psi(x_b,t_a)$：

$$\psi(x_b,t_a)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_a+0;x_a,t_a)\psi(x_a,t_a)dx_a$$

于是，积分的过程相当于将 $\psi(x_a,t_a)$ 中的 x_a 换成 x_b，这跟 $\delta(x_b-x_a)$ 的作用是一样的，因此

$$K(x_b,t_a+0;x_a,t_a)\to\delta(x_b-x_a)$$

[5] i 与 $-i$ 都是 -1 的平方根，它们具有一样的性质，把任意含有 i 的等式中的 i 统一换成 $-i$，等式依然成立。

4.1.7 问题 4-7

证明：

$$\int K^*(b,a)K(b,c)dx_b = K^*(c,a)$$

参考答案：

首先，用 $K(a,c)$ 乘以式 $(4-37)$ 再对 x_c 积分：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} K(x_a,t_a;c)\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(b;x_a',t_a)K(b;x_a,t_a)dx_b dx_a\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_a'-x_a)K(x_a,t_a;c)dx_a = K(x_a',t_a;c)\end{aligned}$$

交换对 x_b 和对 x_a 积分的顺序，有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} K(x_a,t_a;c)\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(b;x_a',t_a)K(b;x_a,t_a)dx_b dx_a\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(b;x_a',t_a)\int_{-\infty}^{+\infty} K(x_a,t_a;c)K(b;x_a,t_a)dx_a dx_b\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(b;x_a',t_a)K(b,c)dx_b\end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^*(b;x_a',t_a)K(b,c)dx_b = K(x_a',t_a;c)$$

将 x_a' 换成 x_a，即得

$$\int K^*(b,a)K(b,c)dx_b = K(c,a)$$

此式即等价于 $(4-38)$。对上式取共轭，得到所证式子。

4.2 4-2 与时间无关的哈密顿量

4.2.1 问题 4-8

由 H 是厄米的这一事实证明，E 是实数。[在式 $(4-30)$ 中选 $f=g=\phi$。]

参考答案：

由式 $(4-42)$

$$H\phi = E\phi \tag{4-42}$$

在两边同时乘以 ϕ^*，并对 x 进行全空间积分：

$$E\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\phi dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi^* H\phi dx$$

假定 ϕ 已经归一化了，那么 $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*\phi dx = 1$，而 H 是厄米的，根据 $(4-30)$ 式：

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi^* H\phi dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(H\phi)^*\phi dx$$

这意味着 $E^* = E$，所以 E 是一个实数。

4.2.2 问题 4-9

由 H 是厄米的这一事实证明，式 $(4-46)$ 成立。[在式 $(4-30)$ 中选 $f=\phi_2, g=\phi_1$。]

参考答案：

$$
\begin{aligned}
E_2\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^*\phi_2dx=&\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^*H\phi_2dx\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}(H\phi_1)^*\phi_2dx\\
=&E_1\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^*\phi_2dx
\end{aligned}
$$

也就是

$$(E_1-E_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^*\phi_2dx=0$$

其中 $E_1\neq E_2$，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1^*\phi_2dx=0$$

4.2.3 问题 4-10

证明式 $(4-59)$ 中定义的 $K(b,a)$ 满足薛定谔方程。

参考答案：

当 $t_b<t_a$ 时，$K(b,a)\equiv 0$ 显然满足；当 $t_b>t_a$ 时：

$$
\begin{aligned}
H_bK(b,a)=&H_b\left(\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)e^{-(i/\hbar)E_n(t_b-t_a)}\right)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_b\phi_n(x_b)\right)\phi_n^*(x_a)e^{-(i/\hbar)E_n(t_b-t_a)}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}E_n\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)e^{-(i/\hbar)E_n(t_b-t_a)}\\
=&-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_b}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)e^{-(i/\hbar)E_n(t_b-t_a)}\\
=&-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t_b}K(b,a)
\end{aligned}
$$

此即薛定谔方程 $(4-25)$。但是仅仅 $(4-25)$ 式不能说明它是一个传播子，仅仅说明它是一个波函数。为了证明它是传播子，还需要类似地验证式 $(4-27)$ 或 $(4-29)$。

4.2.4 问题 4-11

对于三维自由粒子，证明：解

$$\phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{4-60}$$

具有能量 $E_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}^2/2m$。把矢量 $\boldsymbol{p}$ 看作下标 n 并注意到正交性。即只要 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{p}'$，便有

$$\int\phi_{\boldsymbol{p}}^*(\boldsymbol{x})\phi_{\boldsymbol{p}'}(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}=0,\quad 即使E_{\boldsymbol{p}}=E_{\boldsymbol{p}'} \tag{4-61}$$

因此，自由粒子的传播子必然是

$$K_0(\boldsymbol{x}_b,t_b;\boldsymbol{x}_a,t_a)=\sum_{\boldsymbol{p}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)-\frac{i\boldsymbol{p}^2}{2m\hbar}(t_b-t_a)\right] \tag{4-62}$$

因为 $\boldsymbol{p}$ 是分布在一个连续的区域中的，所以遍及“记号” $\boldsymbol{p}$ 的求和实际上等价于遍及 $\boldsymbol{p}$ 的所有值的积分，即

$$\sum_{\boldsymbol{p}}(\quad)=\int(\quad)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tag{4-63}$$

这样，我们找到了由下式给出的自由粒子传播子：

$$K_0(\boldsymbol{x}_b,t_b;\boldsymbol{x}_a,t_a)=\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)-\frac{i\boldsymbol{p}^2}{2m\hbar}(t_b-t_a)\right]\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tag{4-64}$$

参考答案：

从 $(4-60)$ 出发，根据 $H\phi=E\phi$ 以及自由粒子 $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$，可以算得

$$\begin{aligned}H\phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})&=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\\&=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\boldsymbol{p}^2}{\hbar^2}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)\\&=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

所以 $E_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}^2/2m$。至于正交性，那是因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})\phi_{\boldsymbol{p}'}(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}\right]d^3\boldsymbol{x}=0$$

最后一步积分是因为狄拉克函数 $\delta(\boldsymbol{p})$ 的积分表达式：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x}=\delta(\boldsymbol{p})$$

最后根据式 (4—59)，就可以写出

$$\begin{aligned}K_0(\boldsymbol{x}_b,t_b;\boldsymbol{x}_a,t_a)&=\sum_{\boldsymbol{p}}\phi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}_b)\phi^*_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}_a)e^{-(i/\hbar)E_{\boldsymbol{p}}(t_b-t_a)}\\&=\sum_{\boldsymbol{p}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)-\frac{i\boldsymbol{p}^2}{2m\hbar}(t_b-t_a)\right]\end{aligned}$$

严格来说，此式仅仅是“正比于”，而不是相等，因为还缺少归一化因子。现在，由于 $\boldsymbol{p}$ 是连续分布的，那么可以用积分代替求和，也就是 $\sum_{\boldsymbol{p}}(\quad)=\int(\quad)\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3}$，其中因子 $\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}$ 是由归一化要求事后确定的（见问题4-12）。所以结果是

$$K_0(\boldsymbol{x}_b,t_b;\boldsymbol{x}_a,t_a)=\int\exp\left[\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)-\frac{i\boldsymbol{p}^2}{2m\hbar}(t_b-t_a)\right]\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} \tag{4-64}$$

4.2.5　问题 4-12

通过配平方来完成积分 $(4-64)$。证明会得到自由例子传播子的形式 [即式 $(3-3)$ 的三维形式]。

参考答案：

将 $(4-64)$ 配平方，得到

$$
\begin{aligned}
K_0(\boldsymbol{x}_b,t_b;\boldsymbol{x}_a,t_a) &= \int \exp\left[-\frac{i\,(t_b-t_a)}{2m\hbar}\left(\boldsymbol{p}-m\frac{\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a}{t_b-t_a}\right)^2+\frac{im}{2\hbar}\frac{(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)^2}{t_b-t_a}\right]\frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= \left[\frac{2\pi m\hbar}{i(t_b-t_a)}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)^2}{t_b-t_a}\right]\times\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= \left[\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_a)^2}{t_b-t_a}\right]
\end{aligned}
$$

5　第五章 测量与算符

5.1　5-1 动量表象

5.1.1　问题 5-1

考虑任何一个用经典近似方法来设计的测量动量的实验装置，例如磁场分析仪。用前面概括的方法分析仪器，证明会得到动量几率幅的同样结果。

参考答案：

本人并不擅长于实验，因此此问题留到以后再作补充。

5.1.2　问题 5-2

如果我们定义

$$K(x_b,E_b;x_a,E_a)=\iint \exp\left(\frac{i}{\hbar}E_bt_b\right)K(x_b,t_b;x_a,t_a)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_at_a\right)dt_adt_b \tag{5-20}$$

用来仅变换时间变量而不变换空间变量，则请证明：对于哈密顿量 H 与时间无关的系统，有

$$K(x_b,E_b;x_a,E_a)=2\pi\hbar^2 i\delta(E_b-E_a)\sum_n\frac{\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)}{E_a-E_n+i\epsilon} \tag{5-21}$$

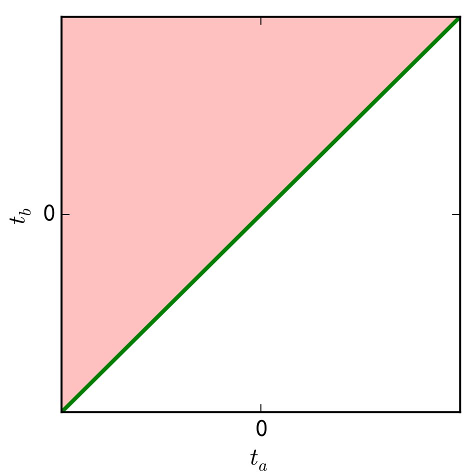
其中 ϕ_n 和 E_n 是 H 的本征函数和本征值。

参考答案：

将式 $(4-59)$ 代入上述定义中，我们有：

$$\begin{aligned}K(x_b,E_b;x_a,E_a)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_a}^{\infty}\sum_n\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b-t_a)+\frac{i}{\hbar}E_bt_b-\frac{i}{\hbar}E_at_a\right]dt_bdt_a\\&=\sum_n\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_a}^{\infty}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b-t_a)+\frac{i}{\hbar}E_bt_b-\frac{i}{\hbar}E_at_a\right]dt_bdt_a\end{aligned}$$

要注意式 $(4-59)$ 给出的 $K(x_b,t_b;x_a,t_a)$ 在 $t_b<t_a$ 时为 0，所以上式的积分区间为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_a}^{\infty}dt_bdt_a$。如下图所示，积分区域是直线 $t_b=t_a$ 的上半部分。



因此，求积分的较好办法是作坐标变换 $\xi=\frac{1}{2}(t_b-t_a),\eta=\frac{1}{2}(t_b+t_a)$，即 $t_b=\eta+\xi,t_a=\eta-\xi$，雅可比行列式为 $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$，积分变为 $2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}d\xi d\eta$，即

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_a}^{\infty}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b-t_a)+\frac{i}{\hbar}E_bt_b-\frac{i}{\hbar}E_at_a\right]dt_bdt_a\\ =&2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(E_b-E_a\right)\eta\right]d\eta\int_0^{\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(E_b+E_a-2E_n\right)\xi\right]d\xi\end{aligned}$$

第一个积分就是 $2\pi\delta\left[\frac{1}{\hbar}\left(E_b-E_a\right)\right]=2\pi\hbar\delta\left(E_b-E_a\right)$，第二个积分，类似式 $(5-17)$，是

$$\frac{i\hbar}{E_b+E_a-2E_n+i\epsilon}\quad(\epsilon\to0)$$

所以总的结果是

$$4\pi\hbar^2i\delta(E_b-E_a)\sum_n\frac{\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)}{E_b+E_a-2E_n+i\epsilon}$$

注意到这里出现了 $\delta(E_b-E_a)$，这意味着上述结果仅当 $E_b=E_a$ 时不为 0，也就是说非零的部分仅仅是 $E_b=E_a$ 的部分，那么将分母中的 E_b 换成 E_a，结果是一样的，因此上述答案等价于

$$2\pi\hbar^2i\delta(E_b-E_a)\sum_n\frac{\phi_n(x_b)\phi_n^*(x_a)}{E_a-E_n+i\epsilon}$$

当然，如果你偏爱对称性，那么可以坚持 E_b+E_a 的形式。

5.2　5-2 量子力学变量的测量

5.2.1　问题 5-3

假设波函数为 $f(x)$ 的粒子出于任何处的几率

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(x)f(x)dx$$

已经归一化为 1。在这个约束下证明，$f(x)=g(x)$ 的状态具有性质 G 的几率最高。

参考答案：

假设 $g(x)$ 也已经归一化，那么，根据施瓦兹不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x)f(x)dx\right|^2\le\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x)g(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(x)f(x)dx=1$$

不等式左边正是 $f(x)$ 具有性质 G 的几率，当 $f(x)=\pm g(x)$ 时取到等号，即此时几率最大。证毕。

如果读者不了解这个施瓦兹不等式，那么这里给出一个简单的证明。考虑关于 t 的二次方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|g(x)|t-|f(x)|\right)^2dx=0$$

显式地展开即

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g^*gdx\right)t^2-2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|gf|dx\right)t+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f^*fdx\right)=0$$

由于等号左端式子明显大于等于 0，因此作为 t 的二次方程，它至多有一个根，也就是对应的判别式 $\Delta \le 0$：

$$\left(2\int_{-\infty}^{+\infty}|gf|dx\right)^2 \le 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty}g^*gdx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f^*fdx\right)$$

而显然

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|gf|dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g^*f|dx\right)^2 \ge \left|\int_{-\infty}^{+\infty}g^*fdx\right|^2$$

化简即得施瓦兹不等式。

5.2.2 问题 5-4

假设在 t_a 时刻系统的波函数是 $\psi(x)$。再假设 $t_b \ge t \ge t_a$ 间隔内，系统运动的性质由传播子 $K(x_b,t_b;x_a,t_a)$ 描述。证明：在 t_b 时刻发现，系统处于 $\chi(x)$ 态的概率由下面积分的模方给出：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*(x_b)K(x_b,t_b;x_a,t_a)\psi(x_a)dx_adx_b$$

我们称这个积分为由 $\psi(x)$ 态到 $\chi(x)$ 态的**跃迁概率幅**。

参考答案：

由式 $(3-42)$，有

$$\psi(x_b) = \int_{-\infty}^{+\infty}K(x_b,t_b;x_a,t_a)\psi(x_a)dx_a$$

再由式 $(5-31)$，所求概率幅为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*(x_b)\psi(x_b)dx_b = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*(x_b)K(x_b,t_b;x_a,t_a)\psi(x_a)dx_adx_b$$

概率即由上式的模方给出。

5.2.3 问题 5-5

假设函数 $f(x,y,z,\dots)$ 可以表示为

$$f(x,y,z,\dots) = \sum_a\sum_b\sum_c\dots F'_{a,b,c,\dots}\chi_{a,b,c,\dots}(x,y,z,\dots) \tag{5-38}$$

把此式代入式 $(5-36)$，再用式 $(5-35)$ 定义的 χ 的正交性证明，$F'_{a,b,c,\dots} = F_{a,b,c,\dots}$

参考答案：

首先需要指出的是，原书中指出式 $(5-37)$ 是式 $(5-36)$ 的逆变换，是考虑了离散系数的可能性，但是式 $(5-35)$ 要对应地作一下修改。将式 $(5-36)$ 代入到式 $(5-37)$，交换求和号和积分号，得到

$$f(x,y,z,\dots) = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\left[\sum_a\sum_b\sum_c\dots\chi^*_{a,b,c,\dots}(x',y',z',\dots)\chi_{a,b,c,\dots}(x,y,z,\dots)\right]f(x',y',z',\dots)dx'dy'dz'\dots$$

这意味着有类似式 $(4-52)$ 的结果

$$\sum_a\sum_b\sum_c\dots\chi^*_{a,b,c,\dots}(x',y',z',\dots)\chi_{a,b,c,\dots}(x',y',z',\dots) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\dots$$

或者反过来，将式 $(5-37)$ 代入到式 $(5-36)$，交换求和号和积分号，得到

$$F_{a,b,c,\ldots}=\sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*_{a,b,c,\ldots}(x,y,z,\ldots)\chi_{a',b',c',\ldots}(x,y,z,\ldots)dxdydz\ldots\right]F_{a',b',c',\ldots}$$

这意味着

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*_{a,b,c,\ldots}(x,y,z,\ldots)\chi_{a',b',c',\ldots}(x,y,z,\ldots)dxdydz\cdots=\hat{\delta}(a-a')\hat{\delta}(b-b')\hat{\delta}(c-c')\ldots$$

这才是正确的式 $(5-35)$ 的替代式。这里的 $\hat{\delta}(x)$ 是本习题解答定义的，为

$$\hat{\delta}(x)=\begin{cases}1,\ x=0\\0,\ x\neq 0\end{cases}$$

是 $\delta(x)$ 的离散版本，满足

$$f(0)=\sum_n\hat{\delta}(n)f(n)$$

现在可以来解决问题 5-5，将式 $(5-38)$ 代入式 $(5-36)$，得到

$$\begin{aligned}F_{a,b,c,\ldots}=&\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*_{a,b,c,\ldots}\sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\cdots F'_{a',b',c',\ldots}\chi_{a',b',c',\ldots}(x,y,z,\ldots)dxdydz\ldots\\=&\sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\cdots\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*_{a,b,c,\ldots}(x,y,z,\ldots)\chi_{a',b',c',\ldots}(x,y,z,\ldots)dxdydz\ldots\right]F'_{a',b',c',\ldots}\\=&\sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\ldots\hat{\delta}(a-a')\hat{\delta}(b-b')\hat{\delta}(c-c')F'_{a',b',c',\ldots}\\=&F'_{a,b,c,\ldots}\end{aligned}$$

证毕。

5.2.4 问题 5-6

假设 A、B、C 是动量的三个笛卡尔分量 p_x、p_y、p_z。函数 $\chi_{a,b,c}(x,y,z)$ 该有什么形式？使用节 $5-2$ 的结果证明得到节 $5-1$ 得到的关系式。

参考答案：

根据本节所讨论的要点，关键是要找出具有恒定动量 $\boldsymbol{p}=(a,b,c)$ 的波函数形式 $\chi_{a,b,c}(x,y,z)$。[6]而我们已经知道，具有确定动量 $\boldsymbol{p}$ 的波函数为[7]

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)$$

上式事实上还没有归一化，因为按照式 $(5-35)$ 的归一化要求，应当有

$$\chi_{a,b,c}(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)$$

[6]即具有动量 $\boldsymbol{p}$ 的粒子一定具有 $\chi_{a,b,c}(x,y,z)$ 形式的波函数。请反复咀嚼本节的**“多变量的测量”**部分第三段。

[7]因为 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{\omega}$，所以 $\exp(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)$。

这时候，从空间表象到动量表象的变换是

$$\phi(\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\boldsymbol{x})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)d^3\boldsymbol{x}$$

逆变换是

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\boldsymbol{p})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)d^3\boldsymbol{p}$$

这个形式跟 $5-1$ 得到的关系式 $(5-6)$ 和 $(5-8)$ 相差一个常数因子，这是由于式 $(5-6)$ 和式 $(5-8)$ 并没有完成归一化要求。

5.2.5 问题 5-7

假设 A、B、C、... 表象既不是坐标表象，也不是动量表象，而是表示系统状态的第三种方式。设已知函数 $\chi_{a,b,c,\ldots}(x,y,z,\ldots)$，它允许我们在坐标表象和 A、B、C、... 表象之间来回变换。再设我们已知在坐标表象和动量表象之间来回变换所必须的变换函数，求在动量表象与 A、B、C、... 表象之间变换所必要的函数。

参考答案：

很明显，从动量表象到 A、B、C、... 表象的变换，需要通过下面的途径迂回进行

动量表象 $\rightarrow$ 坐标表象 $\rightarrow$ A、B、C、... 表象

以三维情况为例，从动量表象到坐标表象的变换为

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\boldsymbol{p})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)d^3\boldsymbol{p}$$

然后从坐标表象到 A、B、C 表象的变换为

$$\begin{aligned}\phi(a,b,c)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*_{a,b,c}(x,y,z)\phi(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{a,b,c}(x,y,z)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)d^3\boldsymbol{x}\right]^*\phi(\boldsymbol{p})d^3\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

所以，所必须的变换函数是

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{a,b,c}(x,y,z)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right)d^3\boldsymbol{x}$$

即等价于先对变换函数作中间表象的变换。

5.3 5-3 算符

5.3.1 问题 5-8

注意，式 $(5-44)$ 意味着 $G^*_A(x,x')=G_A(x',x)$。记住这点，证明对于任何两个当 $x\rightarrow\infty$ 时趋近于零的波函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(x)\mathscr{A}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[\mathscr{A}g(x)]^*f(x)dx \qquad (5-47)$$

任何一个使式 $(5-47)$ 成立的算符，如 $\mathscr{A}$，称为**厄米算符**【参看式 $(4-30)$】。

参考答案：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x)\mathscr{A}f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x)G_A(x,x')f(x')dx'dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x)G_A^*(x',x)f(x')dx'dx \quad [\text{因为}G_A^*(x,x') = G_A(x',x)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x')G_A(x,x')dx'\right)^* f(x)dx \quad (\text{交换 } x, x' \text{ 记号和积分次序}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathscr{A}g(x)]^* f(x')dx' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathscr{A}g(x)]^* f(x)dx
\end{aligned}
$$

5.3.2 问题 5-9

空间表象与动量表象之间的变换函数是

$$
\chi_{a,b,c}(\boldsymbol{x}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right) \tag{5-48}
$$

（参看问题 5-6）。把物理量 A 选为动量的 x 分量 p_x。证明，函数 G_A 是

$$
G_{p_x}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{\hbar}{i}\delta'(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{5-49}
$$

其中 $\delta'(x) = d\delta(x)/dx$。用这个结果决定相应于动量 x 分量的算符，并证明，这个算符的期望值可以写为

$$
\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\boldsymbol{x})\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x} \tag{5-50}
$$

参考答案：

由式 $(5-44)$ 的连续版本和问题 5-6 得

$$
\begin{aligned}
G_{p_x}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') =& \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} p_x\exp\left[\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right]d^3\boldsymbol{p} \\
=& \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} p_x\exp\left[\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right]d^3\boldsymbol{p} \\
=& \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')
\end{aligned}
$$

这正是式 $(5-49)$。所以

$$
\begin{aligned}
\langle p_x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\boldsymbol{x})\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')f(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'d\boldsymbol{x} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\boldsymbol{x})\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

5.3.3　问题 5-10

设量 A 相应于位置的 x 坐标。证明，当函数 G_A 取为

$$G_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = x\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{5-51}$$

时，才能得到 x 平均值的正确公式。而相应 x 的算符就是直接乘 x，即

$$\mathscr{X} f(x) = xf(x) \tag{5-52}$$

参考答案：

很明显，由于没有进行表象变换，因此概率直接就是

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xf^*(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x}$$

这等价于在式 (5 – 46) 中取

$$G_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = x\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

对应的算符就是直接乘以 x，即

$$\mathscr{X} f(x) = xf(x)$$

5.3.4　问题 5-11

证明节 5-2 讨论过的波函数 $\chi_{a,b,c,\ldots}$ 被算符 $\mathscr{A}$ 作用时呈现极简单的性质，即

$$\mathscr{A}\chi_{a,b,c,\ldots}(x) = a\chi_{a,b,c,\ldots}(x) \tag{5-53}$$

参考答案：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}\chi_{a,b,c,\ldots}(x) =& \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(x,x')\chi_{a,b,c,\ldots}(x')dx' \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\ldots a'\chi_{a',b',c',\ldots}(x)\chi^*_{a',b',c',\ldots}(x')\right]\chi_{a,b,c,\ldots}(x')dx' \\
=& \sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\ldots\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\chi^*_{a',b',c',\ldots}(x')\chi_{a,b,c,\ldots}(x')dx'\right]a'\chi_{a',b',c',\ldots}(x) \\
=& \sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\ldots\hat{\delta}(a-a')\hat{\delta}(b-b')\hat{\delta}(c-c')a'\chi_{a',b',c',\ldots}(x) \\
=& a\chi_{a,b,c,\ldots}(x)
\end{aligned}$$

其中 $\hat{\delta}(x)$ 参考问题 5-5。

5.3.5　问题 5-12

证明位置的 x 坐标和动量的 x 分量不是同时可测量的物理量。

参考答案：

位置的 x 坐标和动量的 x 分量对应的算符分别是 x 和 $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$，为了证明它们不能同时测量，只需证明它们两个是不对易的，即

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}[xf(x)] - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(x) = \frac{\hbar}{i}f(x)$$

即

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} \neq 0$$

5.3.6　问题 5-13

讨论把 $\phi_n(x)$ 解释为节 5-2 中的函数 $\chi_{a,b,c\ldots}(x)$ 的可能性。也就是说，$\phi_n(x)$ 是从 x 表象到用 n 标记的表象（能量表象）的变换函数。

参考答案：

在第四章我们已经证明了式 $(4-52)$，它类似式 $(5-35)$，这已经表明 $\phi_n(x)$ 可以作为一类变换函数。至于它的物理意义，我们回顾 $\phi_n(x)$ 的定义，可以发现，它是由分离变量法而来，参数 E_n 的物理意义是能量，即 $\phi_n(x)$ 是具有确定能量 E_n 的波函数。因此，$\phi_n(x)$ 可以作用从 x 表象到能量表象的变换函数。当然，由于只有一个下标 n，那么该结论只适用于一维情形。

6　勘误

6.1　详细内容

6.1.1　75 页

式 $(5-5)$ 中 dy 改为 dx。

6.1.2　89 页

式 $(5-49)$ 中的 $G_{p_x}(x, x')$ 应当改为 $G_{p_x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$，即加粗表示三维空间，而式 $(5-50)$ 改为

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\boldsymbol{x})\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}f(\boldsymbol{x})d^3\boldsymbol{x} \tag{5-50}$$

以及式 $(5-51)$ 的 $G_x(x, x')$ 改为 $G_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$。

6.1.3　90 页

式 $(5-58)$ 下方的段落，“我们首先注意到，$\phi_n(x)$ 是只要系统在点 x，它就处于状态 n 的概率幅。”应当改为“我们首先注意到，$\phi_n(x)$ 是只要系统处于状态 n，它就位于点 x 的概率幅。”（假设与结论交换）

6.1.4　91 页

问题 5-13 中，“χ 表象”改为“x 表象”。

6.1.5　94 页

第二段，“应用得出式 $(2-13)$ 的相同论述”，应改为“应用得出式 $(2-31)$ 的相同论述”。

6.1.6 96 页

式 $(6-16)$，双重积分号

$$\int_{t_a}^{t_b}\int_{ts'}^{t_b}$$

应改为

$$\int_{t_a}^{t_b}\int_{s'}^{t_b}$$

6.1.7 130 页

式 $(7-16)$，等号右边原来是

$$\frac{1}{2\hbar^2}\int\int\cdots$$

应该为

$$\frac{1}{\hbar^2}\int\int\cdots$$

6.1.8 133 页

式 $(7-30)$，$\langle\dots\rangle_s$ 应该改为 $\langle\dots\rangle_S$（小写 s 改为大写 S）

6.1.9 143 页

7-5 跃迁元与算符记号这一节的第一段，“在这一节和下一节我们将看到，任何用传统的波函数”改为“在这一节和下一节我们将看到，如何用传统的波函数”

6.1.10 177 页

$(8-123)$ 式中的方括号中，c^2 前的“$-$”号，应该改为“$+$”号。随之，$(8-124)$ 等号右边要多加一个 $-$ 号。

6.1.11 189 页

问题 9-4 中，所有的小写 s 都该改为大写 S，而且 δ_q 应当改为 δx。